Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz matematike

Autor: Časlav Pejdić

Online i časovi uživo. Aktivni snimci časova.

Lomina 5, tržni centar Zeleni venac

Tel: 064/123-09-10

SADRŽAJ

UVOD

Zbirka sadrži 500 ispitnih zadataka koji su bili na ispitu prethodnih godina i to sa proverenim rešenjima. Rešenja nekih zadataka su detaljna, dok su kod drugih dati samo rezultati.

Zadaci su podeljeni po oblastima i u okviru svake oblasti grupisani po tipu i po težini od lakših ka težim.

Na kraju zbirke nalazi se podsetnik (dodatak A) koji Vam preporučujem da prvo pročitate.

Ova zbirka je nastala kao pomoćno sredstvo studentima koji pohađaju kurs kod autora zbirke, mada može da posluži i ostalima za lakše spremanje ispita.

Prednost ove zbirke je što prvi put na jednom mestu imate teoriju i zadatke i što su ispitni zadaci razvrstani po oblastima, tako da paralelno predavanjima možete postepeno da testirate svoje znanje radeći ispitne zadatke iz oblasti koje ste prešli.

Nadam se da će vam ova zbirka biti od velike pomoći.

Želim Vam puno uspeha na ispitu.

Autor: dipl. ing. Časlav Pejdić

1. DEO RELACIJE I FUNKCIJE

U prvom delu dati su zadaci iz relacija i funkcija.

Zadaci su grupisani tako da najpre dolaze zadaci vezani za ispitivanje osobina relacija, zatim sa operacijama sa relacijama i na kraju zadaci sa funkcijama.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Beskonačno male i beskonačno velike veličine
2. Relacija poretka i relacija ekvivalencije
3. Binarne relacije (osnovne osobine)
4. Funkcije (definicija i osnovne osobine)
5. Relacije i funkcije
6. Osnovne osobine realnih funkcija

Definicija 1: (Dekartov proizvod)

Neka su data dva neprazna skupa A i B. Dekartov proizvod skupova A i B se definiše kao:

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Definicija 2: (definicija relacije)

Neka su data dva neprazna skupa A i B. Svaki podskup ρ skupa $A \times B$ naziva se binarnom relacijom u skupu $A \times B$. Skup uređenih parova koji pripadaju relaciji je graf relacije.

Definicija 3: (refleksivnost)

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je refleksivna ako važi: $(\forall x \in A)\ x \rho x$

Definicija 4: (simetričnost)

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je simetrična ako važi: $(\forall x,y \in A)\ (x \rho y \Rightarrow y \rho x)$

Definicija 5: (antisimetričnost)

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je antisimetrična ako važi:
$(\forall x,y \in A)(x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y)$

Definicija 6: (tranzitivnost)

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je tranzitivna ako važi:
$(\forall x,y,z \in A)\ (x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$

Definicija 7: (relacija ekvivalencije)

Relacija $\rho \subseteq A^2$ naziva se relacijom ekvivalencije ako je istovremeno refleksivna, simetrična i tranzitivna. Klasa ekvivalencije za realan broj a je: $\{x | x \rho a \wedge x \in A\}$.

Definicija 8: (relacija poretka)

Relacija $\rho \subseteq A^2$ naziva se relacijom poretka ako je istovremeno refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Definicija 9: (komplement relacije)

Svakoj binarnoj relaciji $\rho \subseteq A \times B$ može se pridružiti njen komplement $\bar{\rho} \subseteq A \times B$, tako da važi:
$(\forall x,y)\ (x \rho y \Leftrightarrow x \text{ non } \bar{\rho}\ y)$.

Definicija 10: (inverzna relacija)

Svakoj binarnoj relaciji $\rho \subseteq A \times B$ može se pridružiti njoj inverzna relacija $\rho^{-1} \subseteq B \times A$, tako da važi:
$(\forall x,y)\ (x \rho^{-1} y \Leftrightarrow y \rho x)$

Definicija 11: (podskup relacija)

Relacija ρ je podskup relacije σ ($\rho \subseteq \sigma$) ako važi: $(\forall x,y)\ (x \rho y \Rightarrow x \sigma y)$.

Definicija 12: (unija relacija)

Unija relacija ρ i σ ($\rho\cup\sigma$) se definiše kao:$x \ \rho\cup\sigma \ y \Leftrightarrow x \ \rho \ y \lor x \ \sigma \ y$.

Definicija 13: (presek relacija)

Presek relacija ρ i σ ($\rho\cap\sigma$) se definiše kao:$x \ \rho\cap\sigma \ y \Leftrightarrow x \ \rho \ y \land x \ \sigma \ y$.

Definicija 14: (proizvod relacija)

Proizvod relacija ρ i σ ($\rho\circ\sigma$) se definiše kao:$x \ \rho\circ\sigma \ y \Leftrightarrow (\exists z) \ x \ \sigma \ z \land z \ \rho \ y$.

Definicija 15: (definicija funkcije)

Binarna relacija f definisana u skupu $A \times B$ naziva se preslikavanje (funkcija) skupa A u skup B i piše se
$f : A \rightarrow B$, ako su ispunjena dva uslova:
1. skup svih prvih komponenata skupa f jednak je skupu A,
2. važi implikacija $(\forall x \in A) \ (x,y_1) \in f \land (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$, tj. jednakost prvih komponenata implicira jednakost drugih komponenata.

Definicija 16: (domen definisanosti funkcije)

Domen definisanosti funkcije (D) su sve vrednosti nezavisne promenljive (x) za koje funkcija postoji.

Definicija 17: (skup vrednosti funkcije)

Skup vrednosti funkcije (V) je skup svih vrednosti koje funkcija može da ima na domenu D.

Definicija 18: (sirjektivnost)

Ako je preslikavanje $f : A \rightarrow B$ takvo da je skup svih vrednosti funkcije V jednak skupu B, tada se kaže da je f sirjektivno preslikavanje, ili se još kaže da f preslikava skup A na skup B.

Definicija 19: (injektivnost)

Preslikavanje $f : A \rightarrow B$ je injektivno ako i samo ako se različiti elementi skupa A preslikavaju u različite elemente skupa B, tj. važi implikacija: $(\forall x_1,x_2 \in A) \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, odnosno
$(\forall x_1,x_2 \in A) \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Definicija 20: (bijektivnost)

Preslikavanje $f : A \rightarrow B$ je bijektivno ako i samo ako je sirjektivno i injektivno, tj. važi implikacija:

$(\forall x_1,x_2 \in A) \ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Definicija 21: (inverzna funkcija)

Ako je preslikavanje $f : A \rightarrow B$ bijektivno, tada se inverzno preslikavanje f^{-1} preslikavanja f definiše na sledeći način: $f^{-1} : B \rightarrow A$, $f^{-1}(f(x)) = x$, tj. slika svakog elementa f(x) iz skupa B je elemenat x iz skupa A.

Definicija 22: (proizvod funkcija)

Pod proizvodom preslikavanja $f : A\rightarrow B$ i $g : B\rightarrow C$ podrazumeva se preslikavanje $h : A\rightarrow C$ određeno sa:

$(\forall x \in A) \ h(x) = g(f(x))$. Ovo preslikavanje označavamo sa $h = g \circ f$.

Definicija 23: (ograničenost funkcije)

Funkcija $y = f(x)$ je ograničena u oblasti definisanosti D ako postoji pozitivan broj K takav da je:

$(\forall x \in D) \ |f(x)| < K$.

Definicija 24: (monotonost funkcije)

Funkcija $y = f(x)$ je monotono rastuća u oblasti definisanosti D, ako važi implikacija:
$(\forall x1,x2 \in D) \ (x2 > x1 \Rightarrow f(x2) > f(x1))$, a monotono opadajuća u oblasti definisanostiD, ako važi implikacija: $(\forall x1,x2 \in D) \ (x2 > x1 \Rightarrow f(x2) < f(x1))$.

Definicija 25: (parnost funkcije)

Funkcija $y = f(x)$, definisana na segmentu $[-a,a]$, je parna ako je:
$(\forall x \in [-a,a]) \ f(-x) = f(x)$, a neparna je ako je: $(\forall x \in [-a,a]) \ f(-x) = -f(x)$.

Definicija 26: (periodičnost funkcije)

Funkcija $y = f(x)$, definisana u oblasti D, je periodična ako postoji realan broj $a \neq 0$, takav da je:
$(\forall x \in D) \ f(x + a) = f(x)$.

1. (novembar 2020, oktobar-2 2016, jun 2011)
   Ispitati da li je relacija ρ definisana kao $x \rho y \Leftrightarrow x^n - y^n \geq 0$ relacija poretka na skupu ℝ realnih brojeva:
   a) za n = 3
   b) za n = 4
2. (april 2021-usmeni, septembar 2016-usmeni, jun 2013, februar 2013-usmeni, januar 2010-usmeni)
   Ispitati da li je relacija ρ definisana kao x ρ y akko(def) $(\exists k \in N)$ y = kx jedna relacija poretka na skupu prirodnih brojeva
3. (januar 2015, januar 2014, oktobar-2 2011, februar 2011, januar 2010, jun 2009)
   Data je binarna relacija ρ zadata kao: $x\ \rho\ y\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}$,
   Ispitati da li je ovo relacija poretka na skupu: a) ℝ, b) $(1, \infty)$.
4. (jun 2016, februar 2015, januar 2015)
   Data je binarna relacija ρ zadata kao: $x\ \rho\ y\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}$.
   Ispitati koje od osobina linearnog uređenja ima ova relacija na skupu ℝ.
5. (oktobar-2 2018, oktobar-2 2016, oktobar-2 2014)
   Pokazati da je binarna relacija ρ zadata kao: $x\ \rho\ y\ \Leftrightarrow\ x(y^2+1) \leq y(x^2+1)$,
   jedno uređenje skupa $(1, \infty)$, ali ne i skupa ℝ.
6. (oktobar-2 2020, septembar 2018, oktobar 2013, oktobar 2012, februar 2012, januar 2010, jun 2009-usmeni)
   Ispitati da li je relacija ρ definisana uslovom: $x\ \rho\ y\ akko\ (def) x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$ na skupu $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ relacija ekvivalencije. Ukoliko jeste, odrediti klasu ekvivalencije broja 3.
7. (februar 2016, oktobar 2015, januar 2011-usmeni, januar 2010, januar 2009)
   Ispitati da li je relacija ρ definisana kao: $x\ \rho\ y\ akko\ (def)(x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 0$, jedna relacija ekvivalencije na skupu realnih brojeva. Ukoliko jeste, odrediti klase ekvivalencije [0], [1] i [2].
8. (april 2022)
   Ispitati da li je relacija ρ definisana kao: $x\ \rho\ y\ akko\ (def)(x-y)(xy-1) = 0$, jedna relacija ekvivalencije na skupu realnih brojeva. Ukoliko jeste, odrediti klase ekvivalencije [0], [1] i [2].
9. (oktobar 2015)
   Ispitati da li je relacija ρ definisana kao: $x\ \rho\ y\ akko\ (def)(x-y)(x^2y^2-1) = 0$, jedna relacija ekvivalencije na skupu realnih brojeva. Ukoliko jeste, odrediti klase ekvivalencije [0], [1] i [2].
10. (januar 2017)
    Ispitati da li je relacija ρ definisana kao: $x\ \rho\ y\ akko\ (def)(x^2-y^2)(x^2-4y^2)(4x^2-y^2) = 0$, jedna relacija ekvivalencije na skupu realnih brojeva. Ukoliko jeste, odrediti klase ekvivalencije [0], [1] i [2].
11. (februar 2016-usmeni, januar 2013-usmeni, januar 2009)
    Da li je sledeća relacija, relacija ekvivalencije: $x \rho y \Leftrightarrow x^2y+y = xy^2+x$.
    Ako jeste, odrediti klasu ekvivalencije broja 7 i $^2/_7$.
12. (januar 2016-usmeni, jul 2014-usmeni, jun 2013, januar 2013)
    Ispitati da li je relacija ρ definisana na skupu beskonačno malih veličina u okolini neke tačke a($\in R$), kao $f(x)\ \rho\ g(x) \leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, jedna relacija ekvivalencije.
13. (februar 2016, jul 2011)
    Odrediti sve moguće relacije ekvivalencije nad četvoročlanim skupom $S = \{1,2,3,4\}$.
    Koliko ih ukupno ima?
14. (septembar 2013)
    Ispitati da li je $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq A^2$, relacija ekvivalencije na skupu A, ako je relacija $\rho \subseteq A^2$ refleksivna i tranzitivna na skupu A.
15. (jul 2013)
    Date su funkcije $f, g: R \to R$, definisane kao $f(x) = x^2 + 6x - 3$ i $g(x) = x^3 + 1$. Ispitati da li su to bijekcije. Ukoliko nisu odrediti domen i kodomen funkcije koja nije bijekcija tako da bude bijekcija, a zatim odrediti i njihove odgovarajuće inverzne funkcije.
16. (septembar 2016, januar 2015-usmeni, februar 2013)
    Odrediti najmanju vrednost realnog parametra a i odgovarajuću vrednost realnog parametra b tako da funkcija $f: [a, 2] \to [0, b]$, zadata sa $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ bude bijekcija, a zatim odrediti $f^{-1}(x)$.

2. DEO
ALGEBRA

U drugom delu dati su zadaci iz algebre.

Zadaci su grupisani tako da najpre dolaze zadaci iz matrica: komutativne matrice, inverzna matrica, matrične jednačine i rang matrice, dok su na kraju dati sistemi koji se rešavaju primenom Gausovog metoda, Kramerovih pravila, Kroneker-Kapelijevom teoremom ili matričnim metodom.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Kroneker-Kapelijeva teorema
2. Teorema o bazisnom minoru
3. Kramerovo pravilo
4. Inverzna matrica
5. Rang matrice (definicija i osnovne osobine)
6. Matrični metod
7. Linearna zavisnost vrsta (kolona) matrice i rang matrice
8. Matrice (definicija i osnovne osobine)
9. Determinante (definicija i osnovne osobine)

Definicija 1: (matrice)

Matrica tipa m × n je šema oblika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1,2, \dots m; j = 1,2, \dots, n\right).$$

Matrica A označava se kraće i na ovaj način $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$
Ako je m = n matrica se naziva kvadratna, u suprotnom matrica se naziva pravougaonom.
Elementi $a_{k1}, a_{k2},\dots, a_{kn}$, čine k-tu vrstu matrice A.
Elementi $a_{1l}, a_{2l},\dots, a_{ml}$ čine l-tu kolonu matrice A.
Niz elemenata $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ kvadratne matrice n × n nazivamo glavnom dijagonalom te matrice.
Dve matrice su jednake akko su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi međusobno jednaki, tj.
$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ (i = 1,2,…,m;j = 1,2,…,n)
1) Zbir matrica A i B istog tipa je matrica C za koju je:
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (i = 1,2,…,m;j = 1,2,…,n)
2) Proizvod skalara $\alpha\in\Re$ i matrice A je matrica C za koju je:
$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ (i = 1,2,…,m;j = 1,2,…,n)
3) Proizvod AB matrice $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$ i matrice $B = ||b_{ij}||_{n\times p}$ je matrica
$C = ||c_{ij}||_{m\times p}$ za koju je: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,p)$
Proizvod matrica definisan je samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B.
Komutativni zakon za množenje matrica u opštem slučaju ne važi, tj. AB ≠ BA.
Množenje matrica je asocijativna operacija, tj. (AB) C = A (BC).
Množenje matrica je distributivna operacija u odnosu na sabiranje matrica, tj. (A + B) C = AC + BC.
4) Transponovana matrica matrice $A = \|a_{ij}\|_{m\,x\,n}$ je matrica $A' = \|a_{ij}'\|_{n\,x\,m}$ za koju je:

$$a'_{ij} = a_{ji}\ (i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, m)$$

Matrica A' se dobije kada se vrste matrice A uzmu za kolone matrice A'.
Neke specijalne matrice:
1) Matrica O, čiji su svi elementi jednaki nuli, zove se nula matrica.
2) Kvadratna matrica I, čiji su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli, a elementi glavne dijagonale jednaki 1, zove se jedinična matrica.
3) Matrica A kod koje je A' = A, zove se simetrična.
4) Matrica A kod koje je A' = -A , zove se antisimetrična.
5) Matrica A kod koje je AA' = I, zove se ortogonalna.
6) Matrice A i B su komutativne ukoliko važi AB = BA.

Definicija 2: (determinante)

Neka je A kvadratna matrica $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

tada broj $\det A = \sum (-1)^{P(k_1,k_2,\dots k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} (k_1, k_2, \dots, k_n) \in n!$,
gde smo sa n! označili skup svih permutacija niza (1,2,…,n), a sa p($k_1, k_2, \dots, k_n$) parnost permutacije ($k_1, k_2, \dots, k_n$) niza (1,2,…,n), nazivamo determinantom matrice A.

Determinantu matrice A označavaćemo sa detA ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Neposrednom primenom definicije dobijamo formule za izračunavanje determinanata prvog, drugog i trećeg reda:

$\det(a_{11}) = a_{11}$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Determinante trećeg (i samo trećeg reda) se praktično najčešće računaju po Sarusovom pravilu, koje se može lako zapamtiti u sledećem obliku:

determinanti dopišemo prvu i drugu kolonu $\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ - \quad - \quad - \end{array}$ i pravimo proizvode po dijagonalama, ne menjajući znak proizvodu sa glavne dijagonale i njemu paralelnim trojkama, a menjajući znak proizvodu sa sporedne dijagonale i njemu paralelnim trojkama. Na kraju napravimo zbir svih ovih proizvoda što će biti tražena vrednost determinante.

Neke osobine determinanata:
1) Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni elementima druge vrste (kolone), determinanta je jednaka nuli.
2) Zajednički činilac jedne vrste (kolone) može da se izdvoji ispred determinante.
3) Vrednost determinante se neće promeniti ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (kolone), pomnoženi istim brojem.
4) det (AB) = det (A) det (B)

Definicija 3: (algebarski komplement)

Ako izostavimo i-tu vrstu i j-tu kolonu (i,j = 1,…,n) jedne kvadratne matrice tipa n × n, dobijamo jednu novu matricu tipa (n-1) × (n-1). Determinantu na ovaj način dobijene matrice označavamo sa M_{ij} i nazivamo minorom elementa a_{ij}. Algebarski komplement elementa a_{ij}, u oznaci A_{ij}, biće $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Teorema 1: (teorema o razvijanju determinante)

Za svaki i (i=1,2,…,n)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}.$$

Definicija 4: (regularna matrica)

Za kvadratnu matricu A kažemo da je regularna akko je det A ≠ 0, a kada je det A = 0, onda matricu nazivamo singularnom.

Definicija 5: (inverzna matrica)

Kvadratnu matricu X tipa n × n nazivamo inverznom matricom matrice A tipa n × n akko je AX = XA = I. Inverznu matricu matrice A označavamo sa A^{-1}.

Definicija 6: (adjungovana matrica)

Matrica adj A koja se dobija kada se elementi matrice zamene njihovim algebarskim komplementima, pa se zatim takva matrica transponuje, zove se adjungovana matrica matrice A.

Teorema 2: (teorema o inverznoj matrici)

Kvadratna matrica A ima inverznu matricu akko je matrica A regularna. Ako je A regularna matrica, onda je $A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA$.

Definicija 7: (rang matrice)

Neka je data matrica A tipa m × n. Ako postoji regularna podmatrica tipa k × k matrice A i svaka podmatrica tipa i × i, za i > k, ako takvih ima, je singularna, onda kažemo da je rang matrice A jednak broju k, što označavamo sa rang A = k (ili r(A) = k).

Definicija 8: (elementarne transformacije matrica)

Elementarne transformacije matrica su:
a) Razmena dve vrste (kolone)
b) Množenje elemenata jedne vrste (kolone) nekim brojem koji je različit od nule
c) Dodavanje elementima jedne vrste (kolone) odgovarajućih elemenata druge vrste (kolone) pomnoženih proizvoljnim brojem.

Definicija 9: (ekvivalentne matrice)

Matrica A je ekvivalentna matrici B, u oznaci A ~ B, ako se od matrice A može preći na matricu B primenom konačno mnogo elementarnih transformacija.

Definicija 10: (bazisni minor)

Ako je r rang neke matrice A, onda determinantu svake njene regularne podmatrice tipa r × r nazivamo bazisnim minorom matrice A.

Teorema 3: (teorema o bazisnom minoru)

Ako je r rang neke matrice, onda postoji r linearno nezavisnih vrsta, odnosno kolona te matrice, takvih da se svaka druga vrsta, odnosno kolona te matrice može izraziti kao njihova linearna kombinacija.

Teorema 4:

Ako je A ~ B, onda je rang A = rang B.

Teorema 5: (Kroneker-Kapelijeva teorema)

Neka je dat sistem S od ukupno m linearnih jednačina sa n nepoznatih.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} S$$

Matrica sistema S je matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Proširena matrica sistema je matrica $A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

1) Sistem S je saglasan i ima jedinstveno rešenje akko r(A) = r(A_p) = n.
2) Sistem S je saglasan i ima beskonačno mnogo rešenja akko r(A) = r(A_p) < n.
3) Sistem S je protivrečan (nema rešenja) akko r(A) ≠ r(A_p)

Ukoliko je slučaj 1) a matrica A je kvadratna rešenje tražimo primenom Kramerovih formula na sledeći način: ako je Δ = det A i ako sa Δ_i = det A_i označimo determinantu matrice A_i, koja se od matrice A razlikuje po tome što su elementi i-te kolone zamenjeni elementima $b_1, b_2, \dots, b_n$, rešenja nalazimo iz kramerovih formula: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

Definicija 11: (homogen sistem)

Sistem S je homogen ukoliko je $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$

Teorema 6:

Ukoliko je sistem S homogen, tada važi:
1) Sistem S je saglasan i ima jedinstveno rešenje (x,y,z) = (0,0,0) ako je rang A = n.

2) Sistem S je saglasan i ima beskonačno mnogo rešenja ako je rang A < n.

17. (septembar 2020 - usmeni)
Naći sve matrice koje su komutativne sa matricom $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18. (oktobar 2020-usmeni, januar 2014-usmeni)
Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

19. (septembar 2016-usmeni, januar 2011-usmeni, septembar 2010-usmeni)
Naći inverznu matricu matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. (oktobar 2 2021-usmeni)
Naći inverznu matricu matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

21. (februar 2023, januar 2019, januar 2013-usmeni, februar 2011, oktobar 2010)
Rešiti matričnu jednačinu: AX = X + A, gde je A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

22. (april 2023, jul 2020, januar 2019)
Rešiti matričnu jednačinu: XA = X + A, gde je $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

23. (septembar 2014)
Rešiti matričnu jednačinu:$XA = AB$, ako je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 28 & 40 & -7 \\ -9 & -11 & 3 \\ 27 & 22 & -15 \end{pmatrix}$.

24. (jul 2014, jun 2011, jun 2010-usmeni)
Rešiti matričnu jednačinu AX=B ako je: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. (jul 2014, januar 2014, januar 2011, januar 2010)
Rešiti matričnu jednačinu XA=B, ako je: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}$.

26. (februar 2022)
Rešiti matričnu jednačinu AX=B ako je: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 25 \end{pmatrix}$.

27. (januar 2022)
Rešiti matričnu jednačinu AX=B ako je: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = (13 \quad 9 \quad 25)'$.

28. (jun 2013)
Rešiti matričnu jednačinu: $XM = 3XB' + 6B$, pri čemu je: $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(transponovanu matricu matrice B označavamo sa B').

29. (septembar 2015)
Rešiti matričnu jednačinu: $12(X - 3E)^{-1} = AM$, ako je:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

30. (oktobar 2024, januar 2024, januar 2015)
Rešiti matričnu jednačinu: $K + 3X = XAB$, pri čemu je:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = A'$ i $K = 21 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

31. (oktobar 2021, septembar 2018-usmeni , septembar 2013)
Odrediti rang matrice: $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -a & 3 \\ 1 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ u zavisnosti od parametra a.

32. (januar 2013-usmeni, januar 2012-usmeni, januar 2011, januar 2010, januar 2009-usmeni)
Odrediti broj linearno nezavisnih kolona(vrsta) matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

33. (januar 2016)
Odrediti broj linearno nezavisnih kolona matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 2 & -2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

34. (januar 2016)
Odrediti broj linearno nezavisnih kolona matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 6 & 14 & 8 & 22 \end{pmatrix}$.

35. (jul 2021, jul 2019, oktobar-2 2018-usmeni, januar 2017, oktobar-2 2016-usmeni, januar 2015-usmeni, jun 2014-usmeni, oktobar-2 2014-usmeni, oktobar-2 2013-usmeni, februar 2013, oktobar 2011-usmeni, februar 2011, oktobar-2 2010-usmeni, januar 2010, oktobar-2 2009-usmeni)
Odrediti bar 2 bazisna minora sistema jednačina:
x + 2y – z = 8
-2x – 4y + 2z = -16
-x + 2y – z = -8 .

36. (februar 2019)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
6x – 3y + 2z = 1
x + y + z = 1
6x + 3y + 2z = 3

37. (januar 2023 – 5 poena, februar 2019)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
2x + 3y + 6z = 3
x + y + z = 1
2x - 3y + 6z = 1

38. (oktobar 2023, oktobar 2 2022, februar 2019)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
2x + 6y + 3z = 3
x + y + z = 1
2x - 6y + 3z = 1

39. (jul 2022 – 5 poena, februar 2019)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
3x + 2y + 6z = 3
x + y + z = 1
3x - 2y + 6z = 1

40. (septembar 2022 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
6x + 3y + 2z = 3
x + y + z = 1
6x - 3y + 2z = 1

41. (oktobar 2 2024 – 5 poena, oktobar 2 2023 – 5 poena, jun 2023 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
2x + y + 3z = 1
x + y + 2z = 3

$3x + 2y + 6z = 1$

42. (januar 2020)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
$14x + 7y + 7z = 8$
$x + y + z = 1$
$14x + 7y + 14z = 12$

43. (januar 2020)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
$14x + 7y + 7z = 9$
$x + y + z = 1$
$14x + 14y + 7z = 12$

44. (oktobar 2021, januar 2021)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
$2x + 7y + z = 4$
$4x + 7y + 2z = 6$
$4x + 14y + 4z = 9$

45. (oktobar 2 2021)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
$x + 7y + 2z = 4$
$2x + 7y + 4z = 6$
$4x + 14y + 4z = 9$

46. (april 2021)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
$x + 2y + 7z = 4$
$2x + 4y + 7z = 6$
$4x + 4y + 14z = 9$

47. (oktobar 2022 – 5 poena, april 2022 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
$7x + 2y + z = 4$
$7x + 4y + 2z = 6$
$14x + 4y + 4z = 9$

48. (oktobar 2024 – 5 poena, januar 2024 – 5 poena, februar 2023 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$3x + 2y + 6z = 2$
$x + y + 2z = 3$
$2x + y + 3z = 1$

49. (jul 2023 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x + y + 3z = 2$
$x + y + 2z = 3$
$3x + 2y + 6z = 1$

50. (jul 2024, februar 2023 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x + y + 3z = 2$
$x + y + 2z = 3$
$3x + 2y + 6z = 2$

51. (januar 2024 – 5 poena, april 2023 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$x + y + 2z = 4$
$2x + y + 3z = 1$
$3x + 2y + 6z = 1$

52. (septembar 2023 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:

x + y + 2z = 3
2x + y + 3z = 1
3x + 2y + 6z = 1

53. (januar 2024 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
x + y + 2z = 6
2x + y + 3z = 1
3x + 2y + 6z = 1

54. (januar 2024 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
3x + 2y + 5z = 12
x + y + 2z = 5
4x + 3y + z = 5

55. (septembar 2024 – 5 poena)
Rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
3x + 2y + 5z = 22
x + y + 2z = 9
4x + 3y + z = 13

56. (januar 2022)
Rešiti sistem linearnih jednačina, dat u matričnom obliku $XA = B$, gde je $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (13 \quad 9 \quad 25)$

57. (januar 2022)
Rešiti sistem linearnih jednačina:
x + 2y + 3z = 13a
x + y + 2z = 9
2x + 3y + 6z = 25

58. (januar 2018)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
x - y - 2z = 0
3x + 2y - z = 0
4x + y - 3z = 0
2x + 3y + az = 0

59. (oktobar 2 2022, februar 2015)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
kx + 5y + 13z = 0
-x + 7y + 5z = 0
2x + 6y + $(k + 6)$z = 0
u zavisnosti od realnog parametra k.

60. (oktobar 2019)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
2x - 3y + 2z = 0
x + y + z = 0
ax - 2y + 3z = 0
u zavisnosti od realnog parametra a.

61. (jul 2023)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
ax + (a- 3)y + z = 0
-x + ay - z = 0
ax - 4y + az = 0

62. (januar 2014)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
kx + 5y + 13z = 0
-x + 7y + 5z = 0
2x + 6y + $(k + 6)$z = 2

u zavisnosti od realnog parametra k.

63. (februar 2023, septembar 2022, januar 2019, februar 2012)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x + y = 0$
$-x + y + 2z = 1$
$ax + 2ay + 2z = 1.$

64. (januar 2018)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$ax + y + z = 1$
$x + ay + z = 0$
$x + y + az = 0.$

65. (februar 2015, oktobar 2014, januar 2011, januar 2010)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
$x + 2y - az = 1$
$ax + 2y - z = 2$
$x + z = 3$

66. (februar 2022, septembar 2009)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$3x - 2y + 3z = 2$
$ax + (a-7)y + z = 8$
$2x + y - z = 3.$

67. (februar 2016-usmeni, januar 2014)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x - 2y + 3z = 2$
$ax + (a-4)y + z = 4$
$3x + 2y - z = 1.$

68. (februar 2013, februar 2011-usmeni)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x - 2y + 3z = 2$
$(a+3)x + (a-3)y + z = 4$
$3x + 2y - z = 1.$

69. (januar 2024)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$ax + 2y + 5z = 22$
$x + y + 2z = 9$
$4x + ay + z = 13.$

70. (januar 2013, januar 2009)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x - y + 3az = 4$
$3x - 2y + 2az = 3a$
$7x - 4y + 8az = 11.$

71. (oktobar 2 2023, januar 2013, januar 2009)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2ax - y + 3z = 4$
$3ax - 2y + 2z = 3a$
$7ax - 4y + 8z = 11.$

72. (januar 2023, januar 2014, septembar 2013, septembar 2009)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$ax + y + z = 1$
$x + ay + z = a$
$x + y + az = a^2$.

73. (septembar 2016)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:

$ax + a\,y + (a+1)\,z = a$
$ax + ay - (a-1)z = a$
$(2a+1)x + 2a\,y + (3a+2)z = a+1$.

74. (oktobar 2022)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$ax + a\,y + (a+1)\,z = a$
$ax + ay + (a-1)z = a$
$(2a+1)x + 2a\,y + (3a+2)z = a+1$.

75. (januar 2013)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$2x - y + 3z = 1$
$3x - 2y + 3z = 1$
$7x - 4y + a^2z = a.$

76. (april 2022, februar 2018)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$5x + (4a-4)y + (8-a)z = 11$
$x + y + z = 2$
$2x + (3a-3)y + (5-a)z = 5.$

77. (januar 2019, septembar 2018, februar 2018)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$4x + (a+3)y + 4z = 14$
$-2x + (7-3a)\,y + (a-6)\,z = -7$
$2x + 3y + 2z = 7.$

78. (jul 2021-usmeni, novembar 2020 – usmeni, oktobar-2 2020-usmeni, januar 2019-usmeni, oktobar-2 2016-usmeni, jun 2014, januar 2014-usmeni, oktobar-2 2013 – usmeni, januar 2012-usmeni, oktobar-2 2011-usmeni, januar 2011, oktobar-2 2010-usmeni)
Odrediti parametar a tako da sistem ima rešenje:
$2x - y + z + u = 1$
$x + 2y - z + 4u = 2$
$x + 7y - 4z + 11u = a.$

79. (januar 2024, oktobar 2023, septembar 2023, januar 2016)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
$ax - 3y + 2z = 1$
$-x + 3y - (a+1)z = 2$
$x - 3y + 2z = a$

80. (septembar 2024)
Zavisno od vrednsti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:
$3x + ay + 5z = 12$
$x + y + az = 5$
$4x + 3y + z = 5$

81. (oktobar 2 2024, jul 2024, jun 2023, jul 2022, oktobar 2020, januar 2019, jul 2013)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina:
$3x - 2y + 2z = 4$
$2x - y - z = 2$
$x + ay + 3z = -2a$
$2x - 2y + 6z = 4.$

82. (februar 2014)
Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina:
$2x + y - z + u = 2$
$ax + 3y - 2z + 3u = a$
$x + y + 2z + u = 1$
$3x + 2y + z + 2u = a-4.$

83. (septembar 2014, januar 2012)
Ako je $abc \neq 0$, zavisno od ostalih vrednosti parametara a,b i c diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:

$ay + bx = c$
$cx + az = b$
$bz + cy = a.$

84. (jun 2019, oktobar 2018, septembar 2017, oktobar 2015)
Zavisno od vrednosti realnih parametara a i b diskutovati i rešiti sistem jednačina:
$x - 2y + 3z = 1$
$-2x + (a+2)y - 2z = -2$
$x + (a-4)y + (a+12)z = b.$

85. (februar 2018, septembar 2017, januar 2015)
Diskutovati rešenja sistema linearnih jednačina:
$x + 3y - 4z = 0$
$2x + (p+7)y - 6z = 1$
$-x + (p-2)y + (p-1)z = q+3$

86. (januar 2024, jun 2016, oktobar 2015)
Zavisno od vrednosti realnih parametara a i b diskutovati i rešiti sistem jednačina:
$-2x + 22y + 3z - 6u = 6$
$x + 5y + z - 2u = 3$
$6x - 2y + az - 2u = b+2.$

87. (januar 2017, oktobar 2016)
Zavisno od vrednosti realnih parametara a i b diskutovati i rešiti sistem jednačina:
$x - 4y + 11z + 2u = 3$
$2x + y + 3z + u = b-4$
$3x - 3y + 14z + (a+1)u = 8.$

88. (januar 2015)
Zavisno od vrednosti realnih parametara a i b rešiti sistem linearnih jednačina:
$x - 2y + 7z + 3u = 0$
$-2x + (a+2)y - 12z + (a-6)u = 3$
$5x - (a+8)y + (b+33)z + (16-a)u = 2.$

3. DEO
NIZOVI I REDOVI

U trećem delu upoznaćete se sa nizovima i redovima.

Najpre su dati zadaci vezani za nizove, a zatim zadaci u kojima se ispituje konvergencija redova i to grupisani po kriterijumima tako da najpre dolaze zadaci u kojima se primenjuje Opšti Košijev kriterijum konvergencije, zatim kriterijum za redove sa pozitivnim članovima, pa Košijev kriterijum konvergencije i na kraju Dalamberov kriterijum konvergencije

---

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Konvergencija redova sa pozitivnim članovima
2. Granična vrednost niza
3. Broj e
4. Lema o dva policajca u teoriji nizova i u teoriji realnih funkcija jednog argumenta
5. Opšti Košijev kriterijum konvergencije redova
6. Košijev i Dalamberov kriterijum konvergencije redova
7. Osobine nizova (monotonost, ograničenost, Bolcano-Vajerštrasova teorema)
8. Uređeno polje realnih brojeva
9. Aritmetičke osobine konvergentnih nizova

Definicija 1: (monotonost niza)

Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući ako važi: $(\forall n \in N)a_{n+1} - a_n > 0$, a monotono opadajući ako važi: $(\forall n \in N)a_{n+1} - a_n < 0$.

Definicija 2: (ograničenost niza)

Niz $\{a_n\}$ je ograničen ako važi: $(\forall n \in N)(\exists a \in R)|a_n| \leq a$.

Teorema 1: (konvergencija niza)

Ograničen i monoton niz je konvergentan.

Teorema 2:
Ukoliko je niz konvergentan ima tačno jednu tačku nagomilavanja.

Definicija 3: (definicija reda)

Neka je dat beskonačan niz $\{u_n\}$ realnih brojeva, tada se izraz
$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$,
naziva beskonačnim brojnim redom, gde su $u_1, u_2, u_3, \ldots$ članovi toga reda, a u_n njegov opšti član. Svi članovi reda mogu se dobiti iz njegovog opšteg člana u_n tako što indeksu n dajemo redom vrednosti 1,2,… Indeks n ne mora teći od n = 1 već od bilo kog broja $n = n_0$.

Definicija 4: (konvergentni redovi)

Ako od članova reda $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ formiramo niz $s_1, s_2, s_3, \ldots$ gde je
$s_1 = u_1$
$s_2 = u_1 + u_2$
...
$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
…
tada se niz $\{s_n\}$ naziva nizom delimičnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Za brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ kaže se da je konvergentan, ako njegov niz delimičnih suma $\{s_n\}$ teži konačnoj graničnoj vrednosti S, tj. ako postoji $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ i S se naziva zbirom (sumom) tog reda. Ako pak ne postoji $\lim_{n\to\infty} s_n$ tada se kaže da red divergira.
Ako niz delimičnih suma $\{s_n\}$ reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, monotono raste i ako je ograničen tada red konvergira.
Da bi red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergirao potrebno je da opšti član $u_n \to 0$, kada $n \to \infty$. Međutim, ovo nije i dovoljan uslov.
Ako opšti član reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ne teži nuli kada $n \to \infty$, tada red divergira.

Teorema 3: (opšti Košijev kriterijum konvergencije)

Da bi red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bio konvergentan potrebno je i dovoljno da svakom $\varepsilon > 0$ (te prema tome i proizvoljno malom $\varepsilon > 0$) odgovara ceo pozitivan broj $N(\varepsilon)$, takav da je $|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$ za svako $n > N(\varepsilon)$ i svaki prirodan broj p.

Teorema 4: (redovi sa pozitivnim članovima)

Redovi sa pozitivnim članovima su redovi čiji su svi članovi pozitivni, tj. $u_n > 0$, za svako n.
1) Red sa pozitivnim članovima biće konvergentan, ako je njegov niz delimičnih suma $\{s_n\}$ ograničen za svako n, odnosno ako je $s_n \leq M$ za svako n (M je pozitivan konačan broj).
2) Ako članovi redova $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ počev od izvesnog ranga n zadovoljavaju uslov, $u_n \leq v_n$. Tada iz:
a) konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sledi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
b) divregencije rede $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sledi divergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.
3) Ako članovi reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ zadovoLJavaju relaciju: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k (k \neq 0, k \neq \pm\infty)$, tada su oba reda konvergentna ili oba reda divergentna.

Teorema 5: (Košijev kriterijum konvergencije)

Ako je dat red sa pozitivnim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i ako za n →∝ postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, tada za k < 1 dati red je konvergentan, a za k > 1 je divergentan. Za k = 1 pitanje konvergencije pomoću ovog kriterijuma se ne može utvrditi.

Teorema 6: (Dalamberov kriterijum konvergencije)

Ako je dat red sa pozitivnim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i ako za n →∝ postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, tada za k < 1 dati red je konvergentan, a za k > 1 je divergentan. Za k = 1 pitanje konvergencije pomoću ovog kriterijuma se ne može utvrditi.

---

89. (oktobar 2016)
Ispitati monotonost i ograničenost niza $\{a_n\}$ čiji je opšti član definisan kao:
$a_n = \frac{1}{2\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 14} + \ldots + \frac{1}{(6n-4)(6n+2)}$.
90. (januar 2013-usmeni)
Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
91. (januar 2016-usmeni)
Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$.
92. (januar 2016-usmeni, januar 2013-usmeni, januar 2012-usmeni)
Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}$.
93. (februar 2018, januar 2016, februar 2015-usmeni, oktobar 2014, oktobar-2 2013-usmeni, decembar 2011-apsolventski, januar 2011, januar 2011-usmeni, septembar 2010, januar 2010, januar 2009)
Koristeći Lemu o 2 policajca ispitati konvergenciju niza:
$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.
(Tekst može da glasi i "Odrediti graničnu vrednost niza", što mu dođe na isto)
94. (jul 2016)
Odrediti graničnu vrednost niza $a_n, n \geq 2$, ukoliko ista postoji, čiji je opšti član definisan kao:
$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^4-2n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4-2n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4+3n}}$.

95. (septembar 2017, oktobar 2014, februar 2014, januar 2014, oktobar-2 2013, januar 2011, oktobar-2 2010, septembar 2010, jun 2009-usmeni, januar 2009)
Koristeći Bolcano-Vajerštrasovu teoremu dokazati da niz $\{e_n\}$, definisan sa
$e_1 = 2, e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} (n \in N)$
ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
96. (jul 2018, januar 2014, septembar 2011, septembar 2010)
Dokazati da niz $\{g_n\}$, definisan sa
$g_1 = 1, g_{n+1} = g_n + \frac{1}{2^n} (n \in N)$
ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
97. (februar 2015-usmeni, februar 2015, januar 2014, jun 2010-usmeni, septembar 2009, januar 2009-usmeni)
Ispitati konvergenciju harmonijskog i hiperharmonijskog reda.
98. (januar 2018, februar 2016-usmeni, februar 2015, jul 2014-usmeni, februar 2013, januar 2012, oktobar-2 2011, januar 2010)
Ispitati konvergenciju redova:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
99. (januar 2018, januar 2015, jul 2014, jun 2010)
Ispitati konvergenciju redova:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
100. (januar 2013-usmeni, septembar 2009-usmeni)
Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n n!}{n^n}$.

101. (januar 2018, januar 2015, jul 2014, februar 2012, jun 2010)

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

4. DEO NEPREKIDNOST I DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE

U četvrtom delu upoznaćete se sa zadacima u kojima se ispituje neprekidnost i diferencijabilnost funkcije.

Ispitni zadaci su grupisani po težini od lakših ka težim.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Neprekidnost i diferencijabilnost realne funkcije jednog argumenta
2. Diferencijabilnost realne funkcije jednog argumenta
3. Neprekidne funkcije (definicija i osnovne osobine)

Definicija 1: (neprekidnost funkcije)

Za funkciju y = f(x) kaže se da je neprekidna u tački x_0 ako je ispunjen uslov: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Iz ove definicije sledi:
a) da funkcija y = f(x) postoji u tački x = x_0, tj. da je ta funkcija definisana u tački x = x_0,
b) da postoji granična vrednost funkcije y = f(x), kada $x \to x_0$, tj postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
c) da je ta granična vrednost jednaka vrednosti funkcije u tački
x = x_0, tj. da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Ovoj definiciji ekvivalentni su iskazi:
1') Za proizvoLJan broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, takav da važi implikacija: $(\forall x)\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$, ili
1'') Važi implikacija: $h \to 0 \Rightarrow \Delta y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) \to 0$, tj. priraštaj funkcije y = f(x) u tački x_0, teži nuli ($\Delta y_0 \to 0$) kada priraštaj argumenta teži nuli ($h \to 0$).

Za funkciju y = f(x) kaže se da je u tački x = x_0 neprekidna sa leva ako je $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, a neprekidna sa desna, ako je $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
Potreban i dovoljan uslov da funkcija y = f(x) u tački x = x_0 bude neprekidna je da je u toj tački neprekidna sa leva i desna.

Za funkciju y = f(x) kaže se da je neprekidna u intervalu (a,b) ako je neprekidna u svakoj tački tog intervala.

Za funkciju y = f(x) kaže se da je neprekidna na segmentu [a,b] ako je neprekidna u intervalu (a,b) a na krajevima intervala u tački a neprekidna je sa desna, a u tački b sa leva.

Definicija 2: (definicija izvoda. Diferencijabilnost)

Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x i h realan broj različit od nule takav da je x + h tačka posmatrane okoline od x. Tada granična vrednost $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, (1)
ako ista postoji, označavamo sa f'(x) ili $\frac{df(x)}{dx}$ i nazivamo (prvim) izvodom funkcije f u tački x. Ako je f'(x) konačna vrednost, onda kažemo i da je funkcija f diferencijabilna u tački x. Potreban i dovoLJan uslov da granična vrednost (1) postoji je da postoje sledeće dve granične vrednosti $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,
koje redom označavamo sa $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ i nazivamo desnim i levim izvodom funkcije f u tački x i da je $f'_+(x) = f'_-(x)$.
Funkcija je diferencijabilna na nekom skupu ako je diferencijabilna u svakoj tački tog skupa. Postupak kojim funkciji pridružujemo njen izvod nazivamo diferenciranjem.

102.(septembar 2018-usmeni, jun 2015)
Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije:
$f(x) = \sqrt{x},\ \ x \ge 0.$

103.(januar 2013-usmeni)
Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije:
$f(x) = \sqrt{(x-3)^2},$ u tački x = 3.

104. (oktobar 2 2021-usmeni, januar 2017, januar 2009)
Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije:
$f(x) = |\sin(x)|$, u tački $x = \pi$.

105. (jun 2014, januar 2013, septembar 2012, februar 2012, februar 2011, oktobar 2009)
Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkije:
$f(x) = |\sin(x)|$, u tačkama $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

106.(februar 2014, februar 2011-usmeni)
Ispitati diferencijabilnost sledeće funkcije: $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ 2x - sgn(x), & |x| > 1 \end{cases}$.

5. DEO
LIMESI I IZVODI

U petom delu upoznaćete se sa limesima i izvodima.

Limesi i izvodi nalaze primenu u većini oblasti ove zbirke kao što su: Redovi, Neprekidnost i Diferencijabilnost, Osnovne teoreme diferencijalnog računa, Grafik funkcije, Ekstremne vrednosti i Nesvojstveni integrali.

Najpre su dati ispitni zadaci iz limesa, a zatim ispitni zadaci iz izvoda.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Diferencijal realne funkcije jednog argumenta (definicija i osnovne osobine)
2. Lopitalova teorema
3. Geometrijska interpretacija prvog izvoda
4. Izvod složene funkcije
5. Tejlorova i Maklorenova formula za realne funkcije jednog argumenta
6. Osnovna tvrđenja o graničnoj vrednosti realne funkcije jednog argumenta
7. Granična vrednost funkcije (definicija i osnovne osobine)

Definicija 1: (definicija granične vrednosti funkcije)

Neka je data funkcija y = f(x) i neka je a tačka nagomilavanja njene oblasti definisanosti D. Za broj A kaže se da je granična vrednost funkcije y=f(x) u tački x = a, ako za proizvoljan broj $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ kad god je $|x - a| < \delta$. Ovo se simbolički piše $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Za broj A kaže se da je granična vrednost funkcije y = f(x) definisane na neograničenom intervalu, kada $|x| \to \infty$, ako za proizvoljan broj $\varepsilon > 0$ postoji broj M > 0, takav da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za svako $|x| > M$, što pišemo $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = A$.

Ako funkcije f(x) i g(x) imaju granične vrednosti kada $x \to a$ (a može biti i $\pm\infty$) tada za granične vrednosti važe sledeći zakoni:

1) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

2) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

$$3)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$$

Teorema 1: (neki specijalni limesi)

U zadacima se mogu koristiti sledeći poznati rezultati:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Definicija 2: (beskonačno male i beskonačno velike veličine)

Za funkciju y = f(x) kaže se da je beskonačno mala u tački x = a (a može biti i $\pm\infty$), ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, a beskonačno velika ako je $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Neka su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ kada $x \to a$ ($x \to \infty$) beskonačno male i neka je $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$. Tada su:

1) za $k \neq 0$ i $k \neq \infty$ $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ beskonačno male istog reda,
2) za k = 0 $\alpha(x)$ je beskonačno mala višeg reda,
3) za $k = \infty$ $\beta(x)$ je beskonačno mala višeg reda.

Neka su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ kada $x \to a$ ($x \to \infty$) beskonačno velike i neka je $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$. Tada su:

1) za $k \neq 0$ i $k \neq \infty$ $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ beskonačno velike istog reda,
2) za k = 0 $\beta(x)$ je beskonačno velika višeg reda,
3) za $k = \infty$ $\alpha(x)$ je beskonačno velika višeg reda.

Definicija 3: (priraštaj funkcije)

Neka je funkcija y = f(x) definisana u intervalu (a,b) i neka su x_0 i x_1 dve tačke tog intervala. Priraštaj funkcije y = f(x) u tački $(x_0, f(x_0))$ označava se sa Δy_0 i jednak je: $\Delta y_0 = f(x_1) - f(x_0)$, ili $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$, gde je $\Delta x_0 = x_1 - x_0$ priraštaj argumenta u tački x_0. Umesto oznake Δx_0 u upotrebi je često i oznaka h,

pa je priraštaj: $\Delta y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Ako tačka x_0 nije fiksirana, onda
$\Delta y = f(x + h) - f(x)$ predstavlja priraštaj funkcije u proizvoljnoj tački.

Tablica izvoda elementarnih funkcija

$$(const)' = 0 (\cos x)' = -\sin x$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \ (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\sin x)' = \cos x \ (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Neka su u i v funkcije a a,b i c konstante. Tada važi:

$$1) (cu)' = cu'$$
$$2) (u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$3) (au \pm bv)' = au' \pm bv'$$
$$4) (uv)' = u'v + v'u$$
$$5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Definicija 4: (izvod složene funkcije)

Ako funkcija g ima izvod u tački x i funkcija f u tački g(x), onda funkcija h = g o f tako|e ima izvod u tački x i
h'(x) = (f o g)'(x) = f'(g(x))g'(x)

Definicija 5: (izvod funkcije zadate parametarski)

Ako su y i x zadati u funkciji parametra t relacijama
$y = \varphi(t)$ i $x = \psi(t)$, tada je $y_x' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$.

Definicija 6: (izvod inverzne funkcije)

Ako funkcija f ima inverznu funkciju g i u tački x konačan i različit od nule izvod, onda funkcija g ima izvod u tački y = f(x) i
$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

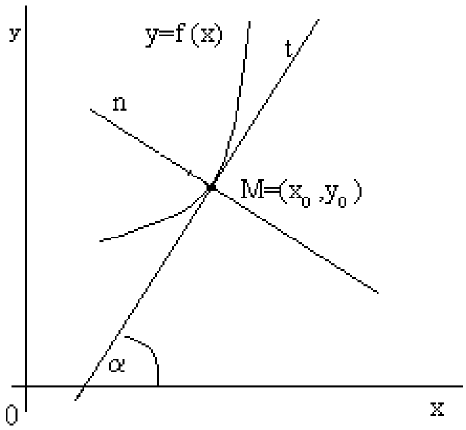
Definicija 7: (izvod funkcije date u implicitnom obliku)

Ako je funkcija data u implicitnom obliku formulom F(x,y) = 0 i ako $F'_y(x,y) \neq 0$, onda je $y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

Definicija 8: (diferencijal funkcije)

Ako je priraštaj Δy funkcije y = f(x) za priraštaj argumenta Δx moguće izraziti kao $\Delta y = \alpha(x)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x$ gde $\beta(\Delta x) \to 0$, $\Delta x \to 0$, onda diferencijalom te funkcije nazivamo izraz $dy = \alpha(x)dx$. Potreban i dovoLJan uslov za postojanje diferencijala je diferencijabilnost funkcije. U tom slučaju je dy = f'(x)dx. Tako, u slučaju kada je f diferencijabilna funkcija u tački x, možemo koristiti i sledeću aproksimativnu formulu:
$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ tj. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Definicija 9: (geometrijska interpretacija izvoda)



Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, onda će koeficijent pravca tangente t krive y = f(x) u tački $M(x_0,f(x_0))$ (vidi sliku) biti tg $\alpha = f'(x_0)$, a jednačina same tangente glasi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, gde je $y_0 = f(x_0)$. Jednačina normale n te krive u tački $M(x_0,f(x_0))$ je$x - x_0 = -f'(x_0)(y - y_0)$.

Definicija 10: (izvodi i diferencijali višeg reda. Lajbnicova formula)

Sledeće rekurentne veze definišu izvode i diferencijale višeg reda:
$y^{(0)} = y$ $d^0y = y$
$y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$ $(n \geq 0)$ $d^{n+1}y = d(d^ny)$ $(n \geq 0)$
Za funkciju f kažemo da je n-puta diferencijabilna (u tački x) ako postoji konačan k-ti izvod $f^{(k)}(x)$ za svaki k, $0 \leq k \leq n$. Ako su u i v
n-puta diferencijabilne funkcije i a,b i c konstante. Onda važi:

$$1)(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$$
$$2)(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$
$$3)(au \pm bv)^{(n)} = au^{(n)} \pm bv^{(n)}$$

$4)(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)}$.
Poslednja od navedenih formula je tzv. Lajbnicova formula.

Teorema 2: (Tejlorova i Maklorenova teorema)

Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna na segmentu [a,b] i $f^{(n)}$ diferencijabilna na intervalu (a,b). Tada $(\forall x \in [a,b])(\exists \theta \in (0,1))(f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_{n+1}(x,\theta))$,gde je $R_{n+1}(x,\theta) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$.
Izraz $R_{n+1}(x,\theta)$ je tzv. ostatak u razvoju funkcije f po Tejlorovoj formuli i oblik u kome je dat potiče od Lagranža.
Ako je $P_m(x)$ polinom m-tog stepena, onda odgovarajuća Tejlorova formula ima oblik:

$$P_m(x) = P_m(a) + \frac{P_m{}'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_m{}''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$+\frac{P_m^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$, jer je $P_m^{(k)}(x) = 0$ za $k > m$.
Pod uslovima navedene teoreme, za a = 0, dobijamo Maklorenovu formulu: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, za neki $\theta \in (0.1)$.

Teorema 3: (Lopitalova teorema)

Neka su f i g funkcije takve da:
1) f i g su diferencijabilne u nekoj okolini tačke a osim eventualno, u samoj tački a
2)$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ili $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$
3) postoji $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
4) $g'(x) \neq 0$ u posmatranoj okolini tačke a za $x \neq a$.
Tada postoji $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ i $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Dakle, Lopitalova teorema nam pruža mogućnost da, pod datim uslovima, izračunavanje granične vrednosti neodređenih izraza oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ zamenimo izračunavanjem granične vrednosti nekog izraza drugog oblika.

107. (januar 2023 – 5 poena, oktobar 2022 – 5 poena)
Naći prvi izvod funcije $y = \ln(tgx)$
108. (oktobar 2 2022 – 5 poena)
Naći prvi izvod funcije $y = e^{3x^4}$.
109. (oktobar 2024 – 5 poena, januar 2024 – 5 poena, oktobar 2 2023 – 5 poena, februar 2023 – 5 poena)
Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \arccos(3x^4 + 1)$
110. (jul 2024, februar 2023 – 5 poena)
Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \arcsin(3x^4 + 1)$
111. (januar 2024 - 5 poena, septembar 2023 – 5 poena, april 2023 – 5 poena)
Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \text{arctg}(3x^4 + 1)$
112. (oktobar 2 2024 – 5 poena, septembar 2024 – 5 poena, jun 2023 – 5 poena)
Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \ln(3x^4 + 1)$
113. (januar 2024 – 5 poena)
Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \cos(3x^4 + 1)$
114.(april 2022 – 5 poena, februar 2016-usmeni, januar 2014-usmeni)
Odrediti prvi izvod funkcije: $\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$.
115. (jul 2020-usmeni, januar 2010-usmeni)
Dokazati da je: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$.
* Ovaj zadatak dolazi na usmenom kao zamena za pitanje granična vrednost funkcije, tako da ovaj limes treba rešiti pomoću definicije za graničnu vrednost, a bez upotrebe Lopitalovog pravila.
116.(jul 2020-usmeni)
Odrediti realne vrednosti parametara a i b za koje važi: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 3x - 2} - ax + b) = 0$.
117. (januar 2013-usmeni, januar 2012-usmeni, oktobar 2010-usmeni)
Izračunati sledeću graničnu vrednost: $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x)^{\frac{1}{x}}$.
118.(januar 2013-usmeni, januar 2012-usmeni)
Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$.
119.(septembar 2020 - usmeni)
Ako je $x = \frac{1}{t}, y = t^2 - 3t + 2$, naći $y'\left(\frac{1}{2}\right)$.
120. (jun 2014-usmeni, oktobar-2 2013 – usmeni, oktobar-2 2010-usmeni, jun 2006, februar 2006)
Koristeći formulu za približno izražavanje diferencijala funkcije preko njegovog priraštaja, izračunati približnu vrednost za $sin28°$.

121. (januar 2019, jun 2018, februar 2017, februar 2016, septembar 2014, januar 2012, oktobar 2010, septembar 2010)
Koristeći formulu za približno izražavanje diferencijala funkcije preko njegovog priraštaja, izračunati približnu vrednost za $sin29°$.

122.(januar 2019-usmeni, januar 2015-usmeni, oktobar-2 2011-usmeni, septembar 2009-usmeni)
Odrediti jednačine tangente krive linije $y = \frac{1}{x^2+1}$ u njenim presečnim tačkama sa hiperbolom $y = \frac{1}{x+1}$.

123.(januar 2015,jul 2014-usmeni, februar 2013, januar 2012, januar 2010)
Proveriti aproksimativnu formulu: $ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}x^3$.

124.(januar 2015, februar 2012, januar 2010, septembar 2009)
Koristeći Tejlorovu formulu razviti polinom $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ po stepenima binoma $x - 2$.

125.(januar 2021-usmeni, septembar 2016-usmeni, februar 2015-usmeni, januar 2014-usmeni, januar 2011-usmeni)
Funkciju $y = arctg2x$ aproksimirati Maklorenovim polinomom trećeg stepena.

126. (januar 2015)
Aproksimirati funkciju $f(x) = cos^3x$ Maklorenovim polinomom četvrtog stepena.

127. (oktobar-2 2018, oktobar-2 2016, oktobar-2 2013)
Aproksimirati funkciju $g(x) = \cos(sinx)$ Maklorenovim polinomom stepena 4, a zatim izračunati:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{24+2x^3+5x^4-24g(x)}{7x^2+2x^3}$.

128. (novembar 2020, oktobar-2 2016, oktobar-2,2014, oktobar-2 2013)
Aproksimirati funkciju $g(x) = \ln(\cos x + x sinx)$ Maklorenovim polinomom stepena 4, a zatim izračunati:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4g(x)-2x^2+x^3}{3x^3+5x^4}$.

6. DEO
OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

U šestom delu upoznaćete se sa osnovnim teoremama diferencijalnog računa.

Zadaci su grupisani po teoremama, tako da najpre dolaze zadaci iz Rolove teoreme, pa iz Lagranžove teoreme i Bolcano-Košijeveteoreme.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Rolova teorema
2. Osnovne teoreme diferencijalnog računa (Fermaova, Rolova, Lagranžova i Košijeva)
3. Neprekidnost realne funkcije jednog argumenta na zatvorenom intervalu: Bolcano-Košijeve i Vajerštrasove teoreme

---

Teorema 1: (Rolova teorema)

Ako je funkcija f neprekidna na segmentu [a,b] i diferencijabilna na intervalu (a,b) i f(a) = f(b), onda:
$(\exists\xi\in (a,b))\ f'(\xi) = 0$.

Teorema 2: (Lagranžova teorema)

Ako je funkcija f neprekidna na segmentu [a,b] i diferencijabilna na intervalu (a,b), onda:
$(\exists\xi\in (a,b))\ f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a)$.

Teorema 3: (Košijeva teorema)

Ako su funkcije f i g neprekidne na segmentu [a,b] i diferencijabilne na intervalu (a,b) i
$(\forall x \in (a,b))\ g'(x) \neq 0$, onda: $\left(\exists\xi\in(a,b)\right)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Teorema 4: (Bolcano-Košijeva teorema)

Ako je funkcija f neprekidna na segmentu [a,b] i ako je $f(a)\cdot f(b)<0$ onda: $\left(\exists\xi\in(a,b)\right)f(\xi)=0$.

129.(oktobar 2021, oktobar-2 2013-usmeni)
Pokazati da jednačina $x^5+3x-11=0$ ima jedno i samo jedno realno rešenje.

130.(januar 2016-usmeni)
Pokazati da jednačina $x^5+x^3+5x=0$ ima samo jedan i to jednostruki realan koren.

131. (april 2021-usmeni, februar 2018, januar 2018, januar 2016, februar 2014, januar 2014, januar 2013, oktobar-2 2010-usmeni, oktobar-2 2009, januar 2009)
Odrediti broj realnih korena jednačine $f'(x)=0$ i interval u kojem se ti koreni nalaze, ukoliko je $f(x)=x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4)$.

132. (februar 2014, oktobar 2012, februar 2012, oktobar 2010)
Da li funkcija $f(x)=\sqrt{x-1}$ zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na intervalu [2,6]?
Ukoliko zadovoljava, naći odgovarajuću vrednost za ξ .

133. (oktobar-2 2013 – usmeni, januar 2013, oktobar-2 2011-usmeni, oktobar 2011, jun 2010)
Koristeći Lagranžovu teoremu dokazati nejednačinu: $|sina-sinb|\le|a-b|$.

134. (januar 2016, septembar 2012, septembar 2011, januar 2009)
Koristeći Lagranžovu teoremu dokazati da za svaki $x\in[0,\infty)$ važi sledeća nejednakost: $ln(x+1)\le x$.

135.(januar 2012)
Koristeći nejednakost $|sinx|\le|x|\le|tgx|$, koja važi za svaki $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, i Lemu o 2 policajca, a bez primene Lopitalove teoreme dokazati da važi: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

136. (februar 2014, oktobar-2 2013, januar 2011, oktobar-2 2010, jun 2010, oktobar-2 2009, januar 2009)
Koristeći Prvu Bolcano-Košijevu teoremu dokazati da jednačina

$$x - 3lnx = 0$$

ima bar jedno rešenje na intervalu $[1, e]$.

7. DEO
GRAFIK FUNKCIJE

U sedmom delu dati su zadaci u kojima je potrebno nacrtati grafik funkcije. Ova oblast je i svojevrstan test vašeg poznavanja izvoda i limesa, bez kojih nijedan od sledećih zadataka neće moći da se uradi.

Funkcije su grupisane po tipovima, tako da najpre dolaze funkcije sa polinomima, pa sa razlomcima, korenima, eksponencijalne i logaritamske funkcije.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Konveksnost realne funkcije jednog argumenta (definicija i osnovne osobine)
2. Asimptote realne funkcije jednog argumenta
3. Monotonost realne funkcije jednog argumenta (definicija i osnovne osobine)

<u>Definicija 1: (rašćenje i opadanje funkcije)</u>

Ako je funkcija y = f(x) neprekidna na segmentu [a,b] i diferencijabilna u intervalu (a,b) tada važi sledeće:
1) Ako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$ funkcija je rastuća na [a,b].
2) Ako je $f'(x) < 0$ za svako $x \in (a,b)$ funkcija je opadajuća na [a,b].
3) Ako je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$ funkcija je konstantna na [a,b].

<u>Definicija 2: (ekstremne vrednosti funkcije)</u>

Neka je funkcija y = f(x) diferencijabilna u okolini tačke $x = x_0$i neka je $f'(x_0) = 0$.
a) Funkcija u tački $x = x_0$ ima lokalni maksimum ako je
$\big(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0)\big) f'(x) > 0$ i $\big(\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon,)\big) f'(x) > 0$
Maksimum je $y^{max} = f(x_0)$.
b) Funkcija u tački $x = x_0$ ima lokalni minimum ako je
$\big(\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0)\big) f'(x) < 0$ i $\big(\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon,)\big) f'(x) > 0$
Minimum je $y^{min} = f(x_0)$.

<u>Definicija 3: (konveksnost i konkavnost funkcije. Prevojne tačke funkcije)</u>

1) Neka je funkcija y = f(x) neprekidna koja ima neprekidan izvod na [a,b] i neka postoji $f''(x)$ za svako $x \in (a,b)$. Tada:
   a) Ako je $f''(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$ grafik funkcije je konkavan.
   b) Ako je $f''(x) < 0$ za svako $x \in (a,b)$ grafik funkcije je konveksan.
2) Neka je $f''(x)$ neprekidna funkcija u okolini tačke $x = x_0$. Da bi neka tačka $N(x_0,f(x_0))$ bila tačka prevoja funkcije potrebno je da $f''(x_0) = 0$. Ako pri tom $f''(x)$ ima jedan znak u intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, a drugi u intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ tada je to i dovoljan uslov za prevoj grafika funkcije.

<u>Definicija 4: (asimptote)</u>

Za pravu y = b kaže se da je horizontalna asimptota krive y = f(x) ako je $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = b$.
Za pravu x = a kaže se da je vertikalna asimptota krive y = f(x) ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.
Prava y = kx + n je kosa asimptota funkcije ako postoje sledeće granične vrednosti: $k = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim\limits_{|x|\to\infty} (f(x) - kx)$.

---

137. (april 2022, oktobar 2018, januar 2014, februar 2013, januar 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$.

138. (januar 2024, jul 2022)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x-6}$

139. (januar 2014, januar 2013, septembar 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$.

140. (januar 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+19x+34}{x+1}$.

141. (januar 2013, jun 2010, oktobar 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+1}$.

142. (januar 2024)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-6}$.

143. (januar 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+1}$.

144. (jul 2024)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+12x+20}{x+1}$.

145. (januar 2024)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$.

146. (oktobar 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{4x^2+13x+10}{x+1}$.

147. (jun 2018)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+2}$

148. (oktobar-2 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+8x+7}{x-2}$.

149. (oktobar-2 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x-1}$.

150. (oktobar 2 2021, oktobar 2019)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+8x+7}{x-1}$.

151. (januar 2021)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x-7}$.

152. (januar 2023)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-9x*4}{x-7}$.

153. (januar 2014, februar 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$.

154. (januar 2018)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

155. (septembar 2013, februar 2012)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{-2x^2+x+4}{(x-2)^2}$.

156. (januar 2018, februar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$

157. (januar 2012)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^3}{4(2-x)^2}$.

158. (januar 2018, februar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x-2}{(x-4)^2}$.

159. (januar 2019, februar 2016, septembar 2011, septembar 2010, jun 2010-usmeni, januar 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

160. (januar 2018, februar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$.

161. (jul 2020, januar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^5-8}{x^4}$.

162. (januar 2020, jun 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = 3x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$.

163. (septembar 2023)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x^2}{4}$.

164. (april 2022, april 2017, januar 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$.

165. (januar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{4-x}}$.

166. (jun 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

167. (februar 2015, jul 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$.

168. (januar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}$.

169. (septembar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$.

170. (jul 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = x\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$.

171. (septembar 2017, januar 2012)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

172. (januar 2019, oktobar 2014, januar 2012, oktobar 2010, jun 2010, januar 2010)
Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

173. (oktobar 2016, januar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = -4x\sqrt{1-x^2}$.

174. (oktobar 2012)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = \sqrt[3]{3x - x^3}$.

175. (januar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2x$.

176. (januar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.

177. (jul 2013, jun 2011)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2}$

178. (septembar 2022)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

179. (jul 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-2}}$

180. (jun 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = 2x - 4 - \sqrt{3x^2 + 6x - 24}$.

181. (jun 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x}$.

182. (oktobar 2-2014, jun 2014, oktobar-2 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 2x}$.

183. (oktobar-2 2014, oktobar-2 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x}$.

184. (februar 2019, februar 2018, februar 2011, januar 2010)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = (x^2 - 8)e^x$.

185. (januar 2020)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = (3 - x^2)e^{-x}$.

186. (februar 2022, januar 2019, septembar 2012)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = xe^{-x^2}$.

187. (februar 2014)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

188. (jul 2023, januar 2011)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

189. (februar 2018, septembar 2017, septembar 2011)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = (3x - 1)e^{\frac{2}{x}}$.

190. (oktobar 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$.

191. (januar 2017, februar 2011)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = (x + 3)e^{\frac{1}{x-3}}$.

192. (februar 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = (x - 1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

193. (jul 2019, maj 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = (x - x^2)e^{\frac{-1}{x-1}}$.

194. (januar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $y = (x^2 + x)e^{\frac{-1}{x}}$

195. (januar 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{e^{2x}}{2x+1}$.

196. (januar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+3x}$.

197. (februar 2022, februar 2019)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{e^{x}}{x^2-3}$.

198. (februar 2019, februar 2018, septembar 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+1}{e^{x}}$.

199. (oktobar 2016)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{e^{x}}$.

200. (januar 2017, septembar 2013, januar 2012, oktobar 2010, jun 2010, jun 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}$.

201. (januar 2019, jun 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{1}{e^{x}-1}$.

202. (januar 2017, januar 2011)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

203. (januar 2014)
Ispitati tok I skicirati grafik funkcije: $f(x) = \sqrt{e^{-x} - e}$.

204. (oktobar 2023, septembar 2014, septembar 2012, februar 2012, oktobar-2 2011)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

205. (oktobar 2 2024, jun 2023, jul 2021, oktobar-2 2020, oktobar-2 2018, januar 2012, oktobar-2 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = e^{x-e^{x}}$.

206. (novembar 2020, oktobar-2 2010, januar 2010, septembar 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.

207. (jun 2019)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

208. (oktobar 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{ln^2 x+2lnx}{x}$.

209. (februar 2023, oktobar 2012, februar 2012, septembar 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{\ln(x-2)}$.

* Ponekad napišu i $f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}$.

210. (februar 2021, januar 2010, januar 2009)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x-1}{ln^2(x-1)}$.

211. (februar 2023, jul 2011)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x}{lnx}$.

212. (septembar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{2x}{1-lnx}$.

213. (jul 2018)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x}{1+lnx}$.

214. (oktobar 2 2023)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{lnx-1}{x}$.

215. (april 2021)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{1-\ln(x-4)}{x-4}$.

216. (oktobar 2 2022)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{2-\ln(3-x)}{x-3}$.

217. (januar 2017)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = (x-1)ln^2(x-1)$.

218. (oktobar-2 2016-usmeni, februar 2015-usmeni, septembar 2014, jul 2011, septembar 2009)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = \ln(x^2 - 8x + 17)$.

219. (april 2023, oktobar 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln(x^2 - 6x + 10)$.

220. (februar 2013, januar 2011)
Ispitati i konstruisati grafik funkcije: $y = \ln(e^{2x} - 5e^x + 7)$.

221. (februar 2019, februar 2018)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln^2x - 4lnx + 3$.

222. (jul 2013, jun 2010)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = x(ln^2x - lnx^2)$.

223. (jun 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$.

224. (septembar 2018, februar 2013)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln\frac{x}{x^2-1}$.

225. (februar 2015, februar 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln\frac{x^3}{x^2-1}$.

226. (februar 2014)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln\frac{x^3}{x+1}$.

227. (oktobar 2022, februar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{1+lnx}{1-lnx}$.

228. (januar 2015, oktobar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{lnx+1}{x-xlnx}$.

229. (septembar 2024)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{x(lnx-2)}{lnx+2}$.

230. (jun 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \ln(ln^2x - lnx + 1)$.

231.(oktobar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = ln\sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

232. (februar 2015)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{\sqrt{1+lnx}}{x}$.

233. (oktobar 2024, januar 2024)
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije: $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2-x}}$.

234. (oktobar-2 2018-usmeni, oktobar-2 2016-usmeni, oktobar-2 2014-usmeni)
Odrediti intervale monotonosti funkcije: $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

235. (januar 2015-usmeni, oktobar 2011-usmeni, oktobar-2 2009-usmeni)
Odrediti intervale monotonosti funkcije: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

236. (jul 2023, jul 2021-usmeni, novembar 2020–usmeni, februar 2016-usmeni, oktobar-2 2014-usmeni, januar 2013-usmeni, januar 2011-usmeni)
Odrediti intervale konveksnosti funkcije: $f(x) = ln(x^2 - 8x + 17)$.

237. (oktobar 2020-usmeni, oktobar 2011-usmeni, oktobar-2 2009-usmeni)
Odrediti intervale konveksnosti funkcije: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

8. DEO
FUNKCIJE SA DVE PROMENLJIVE

U osmom delu upoznaćete se sa zadacima u kojima se radi sa funkcijama sa dve promenljive.

Ovde imamo više grupa zadataka. Najpre su dati zadaci u kojima se rade parcijalni izvodi, pa totalni diferencijal 1. i 2. reda, Tejlorova i Maklorenova formula za funkcije sa dve promenljive i na kraju ono što najčešće i dolazi na ispitu vezano za ovu oblast, ekstremne vrednosti funkcija bez uslova i sa uslovom

---

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Metrički prostor (definicija i primeri)
2. Priraštaj funkcije dva argumenta (definicija)
3. Lokalne ekstremne vrednosti realnih funkcija sa dva argumenta
4. Parcijalni izvodi realnih funkcija dva argumenta (definicija i osnovne osobine)
5. Tejlorova i Maklorenova formula za realne funkcije dva argumenta
6. Vezane lokalne ekstremne vrednosti realne funkcije sa dva argumenta
7. Diferencijabilnost i totalni diferencijal realne funkcije sa dva argumenta (definicija i osnovne osobine)
8. Realne funkcije sa dva argumenta (definicija i osnovne osobine)
9. Uslovni ekstremi realne funkcije dva argumenta

Definicija 1: (parcijalni izvodi)

Prvi parcijalni izvod funkcije z = f(x,y) po nezavisnoj promenljivoj x se definiše kao izvod funkcije z po nezavisnoj promenljivoj x smatrajući y kao konstantu. Označava se sa $\frac{\partial z}{\partial x}$i jednak je: $\frac{\partial z}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dz}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = f_x{}'(x,y)$
$y = const$
Analogno se definiše $\frac{\partial z}{\partial y}$, tj. $\frac{\partial z}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dz}{dy} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = f_y{}'(x,y)$
$x = const$

Definicija 2: (parcijalni izvodi drugog reda)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Ako su parcijalni izvodi neprekidne funkcije tada važi: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Definicija 3: (totalni diferencijal)

Totalni diferencijal funkcije z = f(x,y) definiše se pomoću$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$,a drugog reda sa $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$.

Definicija 4: (Tejlorova i Maklorenova formula)

Ako funkcija z = f(x,y) ima u okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$ neprekidne sve parcijalne izvode zaključno n + 1 reda, tada Tejlorova formula glasi:

$$z = f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\right] + \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\Big|_{M_0} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] + \cdots + \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)^n\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\Big|_{M_0} + \binom{n}{1}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\Big|_{M_0} + \binom{n}{2}(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\Big|_{M_0} + \cdots + \binom{n}{n}(y-y_0)^n\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\Big|_{M_0}\right] + R_n(x,y)$$ gde je

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1}}\bigg|_{M_0}+\binom{n+1}{1}(x-x_0)^n(y-y_0)\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^n\partial y}\bigg|_{M_0}\right.$$
$$\left.+\binom{n+1}{2}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)^2\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}\bigg|_{M_0}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}(y-y_0)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial y^{n+1}}\bigg|_{M_0}\right]$$

pri čemu je $M_0\big(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\big),\ \ 0<\theta<1$,gde je $\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\Big|_{M_0}$,vrednost k –tog parcijalnog izvoda u tačkiM_0 .
Kada je $x_0 = y_0 = 0$ Tejlorova formula se svodi na Maklorenovu.

Definicija 5: (ekstremne vrednosti funkcije dve promenljive)

Funkcija y = f(x) u tački $M(x_0,y_0)$ ima lokalni maksimum (minimum) ako postoji okolina tačke M koja cela pripada oblasti definisanosti D takva da za svako N(x,y) iz te okoline važi:
$f(x,y)<f(x_0,y_0)\big(f(x,y)>f(x_0,y_0)\big)$
Tačke lokalnog maksimuma i minimuma nazivamo ekstremima funkcije.
Potrebni uslovi za ekstremne vrednosti funkcije dve promenljive:
Da bi diferencijabilna funkcija z = f(x,y) u nekoj tački imala ekstremnu vrednost potrebno je da u toj tački parcijalni izvodi prvog reda budu jednaki nuli, tj. da $\frac{\partial z}{\partial x}=0\ \ i\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=0$.
Tačka $M(x_0,y_0)$ naziva se stacionarnom tačkom diferencijabilne funkcije z = f(x,y) ako su prvi parcijalni izvodi u toj tački jednaki nuli, tj. ako je $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0\ \ i\ \ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.
Dovoljni uslovi za ekstremne vrednosti funkcije dve promenljive:
Neka funkcija z = f(x,y) ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke $M(x_0,y_0)$. Zatim, neka je tačka $M(x_0,y_0)$ stacionarna tačka te funkcije, tj. neka je $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0\ \ i\ \ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.
Označimo$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\ B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},\ C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\ \ i\ \ \Delta=B^2-AC$. Tada funkcija z = f(x,y) u tački $M(x_0,y_0)$:
a) ima lokalni maksimum ako je Δ< 0 i A < 0 (C < 0),
b) ima lokalni minimum ako je Δ< 0 i A > 0 (C > 0),
c) nema ekstremne vrednosti ako je Δ> 0.
d) za Δ = 0 problem ekstrema ostaje nerešen te ga dalje treba ispitati.

Definicija 6: (uslovni ekstremi)

To su ekstremne vrednosti funkcije z = f(x,y) uz uslov φ(x,y) = 0, odnosno gde su promenljive x i y vezane relacijom φ(x,y) = 0.
Pri određivanju uslovnih ekstrema prvo formirajmo funkciju Lagranža: $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,gde je λ konstanta.
Uslovni ekstremi su ekstremi funkcije F(x,y) koje ispitujemo na sledeći način:
Prvo na|imo parcijalne izvode, tj formirajmo jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

Iz ovih jednačina se odre|uju vrednosti x,y i λ, tj. tačke M(x,y) u kojima funkcija može imati ekstrem.
Da li je u nekoj tački M(x,y) ekstrem kao i njegovu prirodu određujemo preko drugog diferencijala funkcije $d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, pri uslovu koji vezuje dx i dy tj.$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, dx^2+dy^2\neq 0$, tako da funkcija F(x,y) ima uslovni maksimum ako je $d^2F < 0$, a uslovni minimum ako je $d^2F > 0$.
Prirodu uslovnog ekstrema možemo ispitati i kao običan ekstrem funkcije F(x,y) u stacionarnim tačkama funkcije F(x,y).

---

238. (februar 2015-usmeni)
Kako se definiše metrika u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru?
Dokazati da je trodimenzionalni Euklidski prostor jedan metrički prostor.

239. (jul 2020-usmeni, januar 2019-usmeni, septembar 2016-usmeni, februar 2015-usmeni)
Odrediti priraštaje funkcije $f(x,y)=x+2ye^{x^2-y^2}$ za priraštaje argumenata Δx i Δy .

240.(septembar 2012)
Ispitati da li funkcija $z=\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$ zadovoljava uslov $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

241. (jul 2019, februar 2015-usmeni, januar 2011-usmeni, januar 2010-usmeni)
Ispitati da li funkcija $z = arctg\frac{x}{y}$, zadovoljava uslov $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

242. (oktobar 2016, januar 2014-usmeni)
Ispitati da li funkcija $z(x, y) = xarctg(x^2 - y^2)$, zadovoljava uslov $xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

243. (januar 2015, februar 2014)
Ispitati da li funkcija $z = e^{x^2+y^2}$, zadovoljava uslov $z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

244. (oktobar 2020)
Ispitati da li funkcija $z = \frac{1}{x^2+y^2}$, zadovoljava uslov $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

245. (april 2022, april 2017, jun 2014, oktobar-2 2013)
Ispitati da li funkcija $z = y^{\frac{y}{x}}sin\frac{y}{x}$ zadovoljava uslov $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

246. (april 2023, oktobar-2 2016-usmeni, januar 2015-usmeni, januar 2011-usmeni)
Aproksimirati funkciju $z = e^{3x}arctg2y$, Maklorenovim polinomom drugog stepena.

247. (septembar 2014, oktobar 2011)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 6xy - (3x + 4y)(x + y - 47)$.

248. (januar 2014)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 4y + 1$

249. (oktobar 2014, oktobar 2010, jun 2010)
Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 3xy - x^3 - y^3$.

250. (februar 2022, oktobar 2014)
Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 12xy - x^3 - y^3$.

251. (februar 2016)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^3 + y^3 - 18xy$.

252. (januar 2024, februar 2019)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^3 + y^3 - 27x - 12y$.

253. (februar 2019)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

254. (oktobar 2015, jun 2010, septembar 2009)
Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^3 - 6xy + y^2 + 16$.

255. (jun 2014-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^4 + y^4 - 2x^2$.

256. (januar 2018)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^4 + 2x^2y + 2y^2 + y$.

257. (januar 2014, oktobar 2013, januar 2012-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2x^3 + 6xy + y^2$.

258. (februar 2014, januar 2013-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2 + 6xy + 2y^3$.

259. (oktobar 2023, jul 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 26y$.

260. (januar 2024, oktobar 2 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2$.

261. (januar 2016, februar 2015)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 108lnx - xy^2 + \frac{y^3}{3}$.

262. (oktobar 2022, april 2022, januar 2016)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$.

263. (april 2023, oktobar 2 2022, septembar 2022, januar 2015, oktobar-2 2013, januar 2012, januar 2011, oktobar-2 2010, januar 2010, januar 2009)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z(x,y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}$.

264. (februar 2023, januar 2019, oktobar 2018, februar 2015, januar 2014)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z(x,y) = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}$.

265. (septembar 2016)
Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = e^{y-x}(x^2 + y^2)$.

266. (Januar 2024, januar 2016-usmeni)
Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = e^{y-x}(y^2 - 2x^2)$.

267. (oktobar 2 2024, jun 2023, jul 2022, januar 2015, januar 2012, januar 2010, januar 2009)
Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x + 2e^2y - e^x - e^{2y}$.

268. (septembar 2013, oktobar 2009, januar 2009-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z(x,y) = \frac{1}{2}y^2e^x - \frac{1}{3}y^3 - xe^{3x}$.

269. (septembar 2014)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^y - \frac{1}{3}x^3 - ye^{3y}$.

270. (jul 2024, januar 2019, septembar 2012, februar 2012, januar 2009)
Naći lokalne ekstreme funkcije: $z = xy + \frac{36}{x} + \frac{48}{y}$.

271. (februar 2023, januar 2020, januar 2019, jun 2014)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy + \frac{48}{x} + \frac{36}{y}$.

272. (jul 2020)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{36}{x} + \frac{64}{y} + x + y + 1$.

273. (oktobar 2020)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{49}{x} + \frac{81}{y} + x + y + 1$.

274. (oktobar 2024, januar 2024, januar 2019, jun 2014, septembar 2010-usmeni, januar 2009)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy + \frac{252}{x} + \frac{294}{y}$.

275. (oktobar 2019, februar 2015, januar 2009)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy + \frac{294}{x} + \frac{252}{y}$.

276. (februar 2015, februar 2013, jun 2010)
Naći lokalne ekstreme funkcije: $z = xy(12 - x - y)$.

277. (januar 2021, jun 2018, jun 2016, jul 2014, oktobar 2010, septembar 2009)
Naći lokalne ekstreme funkcije: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

278. (februar 2019, februar 2011)
Odrediti lokalne ekstreme funkcije: $z = x^3 - xy + y^2 - 11x + 3$.

279. (februar 2019, februar 2011-usmeni)
Odrediti lokalne ekstreme funkcije: $z = x^2 - xy + y^3 - 11y + 3$.

280. (april 2021, jul 2018, oktobar 2015, februar 2014, januar 2014, oktobar 2009)
Naći ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2 + y^3 - xy - x$.

281. (februar 2012)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 3x^2y + y^3 - 36x - 39y + 26$.

282. (septembar 2024, septembar 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2 + xy + y^2 - 20x - 19y + 1$.

283. (novembar 2020, oktobar-2 2016, jul 2011, januar 2010, januar 2009)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy}$ za $x \neq 0 \land y \neq 0$.

284. (januar 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{-x^2y - 4y + xy^2 + x}{xy}$ za $xy \neq 0$.

285. (januar 2013-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2x^3 - 21x^2 + 72x + 2y^3 - 9y^2 + 12y + 1$.

286.(septembar 2023, februar 2016, februar 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2xy + y^2$, uz uslov $y + 6 = x$.

287. (jul 2022, april 2022, oktobar-2 2010-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2xy + y^2$, uz uslov $y + 3 = x$.

288.(februar 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy + x^2$, uz uslov $y - x = 6$.

289. (januar 2024, februar 2018)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2y$, uz uslov $2x + y = 3$

290. (februar 2017, januar 2012)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x + 2y - 3$, uz uslov $xy^2 = 1$.

291. (februar 2014)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy + x^2 + 2y$, uz uslov $x - y = 8$.

292. (februar 2022, januar 2012)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{xy}{4} + 2$, uz uslov $x - 2y = 4$.

293. (januar 2022)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2xy + 4x + 2$, uz uslov $x - y = 4$.

294. (oktobar 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2xy + 4$, uz uslov $x - y = 2$.

295. (septembar 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \sqrt{xy}$, uz uslov $50\,000x + 0{,}08y = 1\,000\,000$.

296. (jul 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = y^2 - 2x^2$, pod uslovom $y - 2x = 3$.

297. (septembar 2018, februar 2018, oktobar 2012, jun 2009)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x + 2y$, uz uslov $x^2 + 4y^2 = 8$.

298. (oktobar 2 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x + 2y$, uz uslov $x^2 + y^2 = 20$.

299. (oktobar 2024, januar 2024)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2x + y$, uz uslov $x^2 + y^2 = 20$.

300. (februar 2023, februar 2018, februar 2011)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2x + y$, uz uslov $4x^2 + y^2 = 8$.

301. (oktobar 2 2021, januar 2016, februar 2011)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x + 2y$, uz uslov $x^2 + y^2 = 5$.

302. (septembar 2022)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x + 3y$, uz uslov $x^2 + 9y^2 = 18$.

303. (januar 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 3x + y$, uz uslov $9x^2 + y^2 = 18$.

304. (oktobar 2022)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 2x + 3y$, uz uslov $4x^2 + 9y^2 = 72$.

305. (jul 2023)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 4x + y$, uz uslov $16x^2 + y^2 = 32$.

306. (oktobar 2021, januar 2016)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy$, uz uslov $x^2 + y^2 = 2$.

307. (jul 2024)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = xy^2$, uz uslov $x^2 + y^2 = 27$.

308. (oktobar 2016, februar 2016)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 3xy + 2$, uz uslov $x^2 + y^2 = 32$.

309. (januar 2024)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 4xy + 3$, uz uslov $x^2 + y^2 = 18$.

310. (februar 2023, januar 2011)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x - y$, uz uslov $x^2 - y^2 = 2$.

311. (oktobar 2 2022, januar 2011)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x$, uz uslov $x^2 + 2y^2 = 3$.

312. (jun 2013, januar 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = (x - y)^3 + 1$, uz uslov $x^2 + y^2 = 8$.

313. (januar 2020)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = (y - x)^3 + 1$, uz uslov $x^2 + y^2 = 18$.

314. (septembar 2015, jul 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = (y - x)^4 + 1$, uz uslov $x^2 + y^2 = 18$.

315. (januar 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = (y - x)^4 + 1$, uz uslov $x^2 + y^2 = 8$.

316. (oktobar 2 2024, jun 2023, januar 2015, septembar 2011, januar 2010, januar 2009)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = (x - y)^4 + 1$, uz uslov $x^2 + y^2 = 2$.

317. (jul 2019, maj 2015)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = 8x^2 + 8xy + 2y^2$, uz uslov $x^2 + y^2 = 10$.

318. (januar 2024)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2 + 3xy + y^2 - x + 3y$, uz uslov $x^2 + 1 = y^2$.

319. (septembar 2024)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = x^2 + 3xy + y^2 + 3x - y$, uz uslov $x^2 = y^2 + 1$.

320. (januar 2015-usmeni)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = y - x + 4$, uz uslov $xy^2 - x^2y = -2$.

321. (april 2023, jul 2021, oktobar-2 2020, februar 2018, septembar 2017, oktobar 2013)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, uz uslov $18x^2 + 18y^2 = x^2y^2$.

322. (januar 2017, februar 2015, oktobar 2012, februar 2012)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, uz uslov $2x^2 + 2y^2 = x^2y^2$.

323. (januar 2017, jul 2016, februar 2016, februar 2012, decembar 2011-apsolventski)
Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije: $z = \frac{xy}{x+y}$, uz uslov $x^2 + y^2 = 2x^2y^2$.

9. DEO INTEGRALI

U devetom delu upoznaćete se sa zadacima iz integrala.

Najpre su dati neodređeni integrali i to grupisani po načinu rešavanja (metoda zamene, parcijalna integracija, integracija racionalnih funkcija i integracija iracionalnih funkcija).

Zatim su dati zadaci iz određenih integrala kao i njihove primene na računanje površine ravnog lika.

Treća grupa su nesvojstveni integrali grupisani tako da prvo dolaze nesvojstveni u odnosu na oblast integracije, a zatim u odnosu na funkciju.

Na kraju su dati dvojni integrali.

Ovo je sigurno najznačajnija oblast u zbirci.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Nesvojstveni integral (definicija i osnovne osobine)
2. Dvojni integral (definicija i osnovne osobine)
3. Neodređeni integral
4. Metoda parcijalne integracije
5. Integracija nekih iracionalnih funkcija
6. Određeni integral (definicija i osnovne osobine)

Definicija 1: (definicija integrala)

Neka je data funkcija y = f(x) definisana u intervalu (a,b). Za funkciju y = F(x) kaže se da je primitivna funkcija funkcije y = f(x) u intervalu (a,b) ako je ispunjen uslov $(\forall x \in (a,b))F'(x) = f(x)$.
Neodređeni integral funkcije y = f(x) označava se sa $\int f(x)dx$ i predstavlja skup svih primitivnih funkcija funkcije y = f(x) u intervalu (a,b), tj. $\int f(x)dx = F(x) + C$,gde je $F'(x) = f(x)$,a C proizvoljna konstanta.
Izraz f(x)dx naziva se podintegralni izraz, a *f(x)* je podintegralna funkcija ili integrand.

Definicija 2: (osnovna svojstva neodređenog integrala)

$a)\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

$b)\ \int dG(x) = G(x) + C$

$c)\ \int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A = const. iA \neq 0)$

$d)\ \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Tablica osnovnih integrala:

$\int dx = x + c$, $c$je proizvoljna konstanta

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c (n \neq 1)$

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

$\int e^x dx = e^x + c \int sin\, x\, dx = -\, cos\, x + c$

$\int cos\, x\, dx = sin\, x + c \int \frac{1}{cos^2 x} dx = tgx + c$

$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -ctgx + c \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + c \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = arcsin \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

Definicija 3: (integracija metodom zamene)

Ako je funkcija f(x) neprekidna, stavljajući $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, gde je funkcija g(t) neprekidna zajedno sa svojim prvim izvodom g'(t) i ima inverznu funkciju t = g^{-1}(x), dobija se sledeća jednakost $\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$.

Definicija 4: (metoda parcijalne integracije)

Neka su u = u(x) i v = v(x) dve diferencijabilne funkcije. Ako postoji neodređeni integral $\int u(x)v'(x)dx$ tada postoji i neodređeni integral $\int v(x)u'(x)dx$ i važi jednakost :
$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$.
Ova jednakost može da se napiše u sledećem kraćem obliku$\int udv = uv - \int vdu$ i ona predstavlja obrazac za parcijalnu integraciju. Primenjujući ovaj obrazac može se integral oblika$\int udv$ izračunati, ako je moguće izračunati integral na desnoj starni obrasca koji je oblika $\int vdu$.

Definicija 5: (integracija racionalnih funkcija)

Funkcija $f(x)$je racionalno razlomljena ukoliko ima oblik $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, gde su $p(x)\ i\ q(x)$polinomi sa realnim koeficijentima.
Razlomak $\frac{p(x)}{q(x)}$se zove pravi ukoliko je stepen polinoma u brojiocu $p(x)$manji od stepena polinoma u imeniocu $q(x)$.
1) Ako je razlomak $\frac{p(x)}{q(x)}$neprav prethodno iz njega treba izdvojiti ceo deo.
2) Ako je razlomak$\frac{p(x)}{q(x)}$pravi, onda se njegov imenioc $q(x)$rastavlja na činioce oblika
$(x-a)^{\alpha}(x^2 + px + q)^{\beta}$, gde je $\frac{p}{4} - q < 0$,tj. koreni te kvadratne jednačine su imaginarni reda βi $a \in R$, tj. a je realan koren reda α.Zatim se razlomak $\frac{p(x)}{q(x)}$razlaže na zbir elementarnih razlomaka i to na sledeći način
$\frac{p(x)}{(x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta} x + C_{\beta}}{(x^2+px+q)^{\beta}}$.

Definicija 6: (integracija nekih iracionalnih funkcija)

Neka je dat neodređen integral oblika $\int R\big(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \dots, x^{m_k/n_k}\big)dx$, gde je R racionalna funkcija svih argumenata. Ako se uvede smena $x = t^n$,gde je n najmanji zajednički sadržalac imenilaca $n_1,n_2,\dots,n_k$, tada se dobija integral racionalne funkcije promenljive t.

Definicija 7: (NJutn - Lajbnicova formula)

Ako je funkcija f : R → R integrabilna na segmentu [a,b] i ima na tom segmentu primitivnu funkciju F(x) tj. $\forall x \in [a,b]\ \ je\ \ F'(x) = f(x)$,tada je $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Poslednja formula je NJutn-Lajbnicova formula.

Definicija 8: (metod smene kod određenih integrala)

Neka je funkcija f : R → R integrabilna na segmentu [a,b]. Ako su ispunjeni sledeći uslovi:
1) funkcija x = g(t) je neprekidna zajedno sa svojim prvim izvodom na intervalu [α, β] gde su α i β rešenja jednačina g(t) = a i g(t) = b, tako da je g(α) = a i g(β) = b.
2) složena funkcija f(g(t)) je definisana i neprekidna na segmentu [α,β],
tada $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Definicija 9: (metod parcijalne integracije kod određenih integrala)

Ako su funkcije f : R → R i g : R → R neprekidne na segmentu [a,b], tada $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$.

Definicija 10: (primena određenog integrala na izračunavanje površine ravnog lika)

Ako je y = f(x) ≥ 0 za x ∈ [a,b] tada je površina krivolinijskog trapeza ograničenog lukom krive, pravama x = a i x = b i odsečkom ose Ox za x ∈ [a,b] definisana sa $P = \int_a^b f(x)dx$

Ako je y = f(x) ≤ 0 za x ∈ [a,b] tada je površina lika ograničenog takvom konturom $P = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$, tj. $P = -\int_a^b f(x)dx$.

Ako funkcija nad segmentom [a,b] menja znak, tada se segment [a,b] razbija na konačan broj segmenata u zavisnosti od toga da li je f(x) ≥ 0, odnosno f(x) ≤ 0, pa je vrednost određenog integrala funkcije y = f(x) nad segmentom [a,b] jednaka zbiru površina iznad ose Ox, uzetih sa znakom plus i zbiru površina ispod ose Ox, uzetih sa znakom minus.

Ako se traži površina oblasti ograničena graficima funkcija
y = f(x) i y = g(x) i pravama x = a i x = b, tada je površina data obrascem $P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.
Ovaj obrazac se primenjuje i za slučaj kada je potrebno da se izračuna površina oblasti ograničene graficima funkcija y = f(x) i y = g(x). U ovom slučaju su granice određenog integrala apscise a i b presečnih tačaka A i B, i dobijaju se rešavanjem jednačine f(x) = g(x).

Definicija 11: (definicija nesvojstvenog integrala)

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ definisan je za f : R → R neprekidnu na segmentu [a,b].
Ako interval integracije nije konačan, ili ako podintegralna funkcija na tom intervalu ima prekide, tada se definiše pojam uopštenog ili nesvojstvenog integrala.

Definicija 12: (nesvojstveni integral s obzirom na interval)

Ako je funkcija f(x) integrabilna na svakom konačnom segmentu [a,b], to nesvojstveni integral $\int_a^\infty f(x)dx$ se definiše sa $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$, a nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ sa $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$.
Ukoliko ove granične vrednosti postoje i konačne su odgovarajući integral nazivamo konvergentnim, u suprotnom divergentnim.
Nesvojstveni integral tipa $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ gde je f(x) neprekidna ∀x ∈$\Re$ se definiše sa $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)dx$, gde je c ma koji realan broj i on je konvergentan ako su oba integrala konvergentna.

Definicija 13: (nesvojstveni integral s obzirom na funkciju)

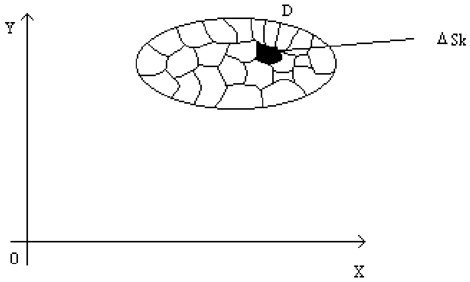
Ako je funkcija f : R → R neograničena u okolini tačke b, tj. $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ a integrabilna na svakom segmentu [a,b - ε], ε> 0, nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ se definiše sa $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Ako je funkcija f : R → R neograničena u okolini tačke a, tj. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ a integrabilna na svakom segmentu [a + ε,b], ε> 0, nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ se definiše sa $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Ako je funkcija f : R → R neograničena u okolini tačke c, tj. $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ a integrabilna na svakom segmentu [a,c-ε]∪[c+ε,b], ε> 0, nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ se definiše sa $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Definicija 14: (definicija dvojnog integrala)

Neka je u nekoj zatvorenoj i ograničenoj oblasti D ⊆ R × R data neprekidna funkcija z = f(x,y). Podelimo oblast D na n delova $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (sl. ispod) tako da ti delovi nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, a čije površine su $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. U unutrašnjosti ili na periferiji svakog dela S_k, k=1,2,…,n izaberimo po jednu tačku $T_k(\xi_k,\eta_k)$. Vrednost funkcije z = f(x,y) u svakoj tački T_k, tj. $f(\xi_k,\eta_k)$ pomnožimo sa odgovarajućom površinom Δs_k, odnosno formirajmo proizvod $f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$. Suma svih takvih proizvoda $S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\mu_k)\Delta s_k$ zove se integralna suma funkcije f(x,y).



Ako postoji granična vrednost sume S, nezavisno od podele kao i izbora tačke $T_k(\xi_k,\eta_k)$, kada broj delova s_k teži beskonačnosti a površina maksimalnog Δs_k teži nuli, tada kažemo da je ta granična vrednost dvojni integral funkcije z = f(x,y) u oblasti D, i funkciju z = f(x,y) nazivamo integrabilnom u toj oblasti. To simbolički označavamo

$$\lim_{\max \Delta S_K \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\mu_k)\Delta s_k = \iint_D f(x,y)ds .$$

U pravouglom koordinatnom sistemu ds = dxdy, pa je tako

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

<u>Definicija 15: (osobine dvojnog integrala)</u>

Ako je f(x,y) integrabilna funkcija u oblasti D, tada je integrabilna u toj oblasti i funkcija cf(x,y), gde je c proizvoljna konstanta i tada je $\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$.

Ako su f(x,y) i g(x,y) integrabilne funkcije u oblasti D, tada su u toj oblasti integrabilne i funkcije f(x,y) ± g(x,y), pri čemu je $\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$.

Neka je oblast D u kojoj je data funkcija f(x,y) nekom linijom podeljena na dve (ili više) oblasti D_1 i D_2. Ako postoje integrali $\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$i $\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$, tada postoji i integral $\iint_D f(x,y)dxdy$, pri čemu je $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$.

Ako su f(x,y) i g(x,y) integrabilne funkcije u oblasti D i ako je f(x,y) ≥ g(x,y) u svim tačkama (x,y) ∈ D, tada je $\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy$.
Specijalno ako je g(x,y) = 0 tada se ova osobina svodi na $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

<u>Ako je f(x,y) = 1 u svakoj tački (x,y) iz oblasti D, tada je dvojni integral te funkcije jednak površini oblasti D.</u>

---

324. (jul 2022 – 5 poena)
Izračunati integral: $\int \cos(2x+3)\,dx$
325. (septembar 2022 – 5 poena)
Izračunati integral: $\int \sin(2x+3)\,dx$
326. (jul 2023 – 5 poena)
Izračunati integral: $\int x\cos x\,dx$
327. (januar 2024 - 5 poena, oktobar 2023 – 5 poena)
Izračunati integral: $\int x\sin x\,dx$
328.(jul 2014, januar 2012, januar 2011, oktobar 2009)
Izračunati integral: $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2}$.
329. (januar 2012, januar 2010)
Izračunati integral: $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+1}dx$.
330. (jul 2024, oktobar 2021, januar 2019, februar 2016-usmeni, januar 2014)
Izračunati integral: $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^x+2)(e^{2x}+1)}dx$.

331. (januar 2018)
Izračunati integral: $\int e^{x+e^x} dx$.

332. (jun 2013, januar 2012)
Izračunati integral: $\int (x^3+x)e^{-x^2} dx$.

333. (septembar 2022, jul 2016, jun 2013)
Izračunati integral: $\int (5x^5+x^2)e^{x^3} dx$.
334. (oktobar 2023)
Izračunati integral: $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.
335. (septembar 2013)
Izračunati integral: $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx$.
336. (oktobar 2022, januar 2020)
Izračunati integral: $\int x^2 \cos x \, dx$.
337. (januar 2023)
Izračunati integral: $\int x \, arctg x dx$.
338. (februar 2023, april 2022, februar 2021, septembar 2012, oktobar-2 2009)
Izračunati integral: $\int arctg \sqrt{x} dx$.
339. (februar 2023, oktobar 2012, oktobar-2 2009)
Izračunati integral: $\int x^2 \, arctg x dx$.
340. (april 2021, oktobar 2013)
Izračunati integral: $\int \frac{\arccos x}{x^2} dx$.
341. (januar 2016, oktobar 2013)
Izračunati integral: $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.
342. (januar 2022)
Izračunati integral: $\int \ln \frac{x+1}{x-1} dx$
343. (jul 2022, oktobar 2016)
Izračunati integral: $\int \ln(x^2+16) \, dx$.
344. (februar 2022, januar 2010)
Izračunati integral: $\int \arcsin x \, dx$.
345. (januar 2018, septembar 2014)
Izračunati integral: $\int \arcsin^2 x \, dx$.
346. (januar 2020)
Izračunati integral: $\int \frac{x^2+2x-3}{x^4} e^{\frac{1}{x}} dx$.
347.(februar 2012)
Izračunati integral: $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} e^x dx$.
348.(februar 2019, oktobar 2015, januar 2010)
Izračunati integral: $\int e^{5x} \cos(6x) dx$.
349. (februar 2019, oktobar-2 2018, oktobar-2 2016, jun 2016, oktobar-2 2014, januar 2010)
Izračunati integral: $\int e^x \sin(4x) dx$.
350. (oktobar 2024, januar 2024)
Izračunati integral: $\int \sin(2x) e^{3x} dx$.
351. (januar 2016)
Izračunati integral : $\int x e^x \sin x \, dx$.

352. (januar 2017, oktobar 2010)
Izračunati integral: $\int \frac{21x^2-94x+72}{x^3-7x^2+12x} dx$.
353. (oktobar 2019, januar 2017, jul 2014, septembar 2009)
Izračunati integral: $\int \frac{21x^2-80x+48}{x^3-6x^2+8x} dx$.
354. (februar 2019, oktobar 2015, jun 2009)
Izračunati integral: $\int \frac{2x^2+3x-4}{x^3-2x^2+x-2} dx$.
355. (februar 2022, februar 2019, oktobar 2010)
Izračunati integral: $\int \frac{8x^2-12x+2}{x^3-2x^2+x-2} dx$.
356. (januar 2015)
Izračunati integral: $\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3} dx$.

357. (jul 2023, februar 2015-usmeni, januar 2014, septembar 2010)
Izračunati integral: $\int \frac{x^3-2}{x(x^2+1)}dx$.
358. (oktobar 2 2022, februar 2015, februar 2011)
Izračunati integral: $\int \frac{9x^3-6x^2+7x-4}{x^4-x^3+x^2-x}dx$.
359. (oktobar 2 2023, februar 2014, februar 2011)
Izračunati integral: $\int \frac{6x^2-2x-2}{x^3-x}dx$.
360. (jun 2015)
Izračunati integral: $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$.
361.(septembar 2016, januar 2016)
Izračunati integral: $\int \frac{x+4}{x^4+9x^2}dx$.
362. (oktobar 2020)
Izračunati integral: $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx$.
363. (jul 2020, septembar 2016, januar 2016)
Izračunati integral: $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx$.
364. (septembar 2023, septembar 2011, januar 2009)
Naći: $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
365.(septembar 2024, januar 2019)
Naći: . $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$
366. (januar 2024, jul 2013, oktobar 2009, septembar 2009)
Izračunati integral: $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.
367. (januar 2019, januar 2018, jun 2010)
Izračunati integral: $\int \sqrt{\frac{1-x}{x^4(1+x)}}dx$.
368. (januar 2014, oktobar 2013)
Izračunati integral: $\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}dx$.
369. (januar 2019, septembar 2010)
Izračunati integral: $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx$.
370. (septembar 2017)
Izračunati integral: $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.
371. (januar 2018, oktobar 2014)
Izračunati integral: $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.
372. (februar 2013)
Izračunati: $\int_2^{e+1} x\ln(x-1)dx$.
373. (septembar 2018)
Izračunati: $\int_0^1 30x^2(1-x)^5dx$.
374.(januar 2015)
Izračunati: $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.
375. (februar 2013-usmeni)
Odrediti površinu ograničenu x-osom i lukom krive: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.
376. (oktobar 2 2024, jun 2023, oktobar-2 2020-usmeni, januar 2015)
Izračunati površinu ograničenu krivom: $f(x)=\frac{3x^2}{x^3-1}$ i x-osom na intervalu $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.
377. (januar 2015, januar 2012, oktobar-2 2010, januar 2010)
Izračunati površinu oivičenu grafikom funkcije $f(x)=e^{x-e^x}$ i x-osom.

378. (oktobar 2016, jun 2010)
Izračunati površinu oblasti oivičene x - osom i krivom: $f(x)=(x^2-8)e^x$ u II i III kvadrantu.
379. (januar 2021)
Izračunati površinu koju funkcija $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x-7}$ zaklapa sa kosom asimptotom na intervalu (8,9).

380. (januar 2024)
Izračunati površinu koju funkcija $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x-6}$ zaklapa sa kosom asimptotom na intervalu (7,8).
381. (januar 2024)
Izračunati površinu koju funkcija $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x-6}$ zaklapa sa kosom asimptotom na intervalu (7,8).
382. (april 2023, jul 2021, oktobar-2 2020, februar 2014, oktobar-2 2006, oktobar 2006, februar 2006-usmeni)
Izračunati nesvojstveni integral: $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.
383. (januar 2020, januar 2009)
Izračunati nesvojstveni integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}dx$.
384. (septembar 2017)
Izračunati nesvojstveni integral: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{(a+1)^2}}$.
385. (oktobar 2023, april 2022, februar 2013)
Izračunati integral $\iint_D dxdy$ gde je D unutrašnjost trapeza sa temenima $A(-1,-1), B(6,-1), C(3,2), D(2,2)$.
386. (oktobar 2024, januar 2024, februar 2023, jul 2022, februar 2016, septembar 2015, jun 2010)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D dxdy$ gde je D unutrašnjost paralelograma čije stranice pripadaju pravim linijama: $y+x=2, y+x=6, 3y-x=-2$ i $x-3y=6$.
387. (jul 2024, februar 2023, februar 2016, januar 2015, januar 2013-usmeni)
Izračunati integral: $\iint_D dxdy$ gde je oblast D unutrašnjost paralelograma čije stranice pripadaju pravim linijama: $x-y=0, 2x-y=0$, $x-y=4$ i $2x-y=4$.
388. (januar 2024, februar 2017, februar 2016, oktobar 2014, jul 2011, januar 2010, januar 2009)
Izračunati integral: $\iint_D dxdy$, gde oblast D predstavlja unutrašnjost četvorougla sa temenima $A(-2,0), B(1,-2), C(2,0), D(1,2)$.
389. (jul 2018, januar 2012)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D dxdy$, gde je D unutrašnjost trougla sa temenima $A(1,2), B(2,-1)$ i $C(4,4)$.
390. (novembar 2020, oktobar-2 2016, oktobar-2 2014, oktobar-2 2013)
Izračunati integral: $\iint_D dxdy$, gde oblast D predstavlja unutrašnjost kruga $x^2+y^2\le 2$.
391. (septembar 2023, februar 2013, januar 2009)
Izračunati integral: $\iint_D dxdy$, gde oblast D predstavlja unutrašnjost kruga $x^2+y^2\le 1$.
392. (april 2022, april 2017, januar 2017, februar 2015, septembar 2013, januar 2013, oktobar-2 2009-usmeni)
Izračunati integral: $\iint\limits_D xydxdy$, gde je D unutrašnjost koju obrazuje krug $x^2+y^2=9+8y$ u četvrtom kvadrantu.
393. (jul 2023)
Izračunati integral: $\iint\limits_D xydxdy$, gde je D unutrašnjost koju obrazuje krug $x^2+y^2=9+8y$ u II kvadrantu.
394. (jun 2018, februar 2013, oktobar 2012, septembar 2012, februar 2012, januar 2009)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D oblast ograničena krivom $2x^2+3y^2=6$ u III kvadrantu.
395. (februar 2018, januar 2016-usmeni, jul 2013, januar 2013, oktobar-2 2011, septembar 2010)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D oblast ograničena krivom $2x^2+3y^2=6$ u IV kvadrantu.
396. (januar 2013)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D oblast ograničena krivom $3x^2+2y^2=6$ u III kvadrantu.
397. (oktobar 2022, januar 2017, februar 2016, februar 2015, septembar 2014, januar 2013)
Izračunati integral: $\iint_D xydxdy$, gde je oblast D ograničena lukom krive $x^2+y^2+45=14x$ u IV kvadrantu.
398. (februar 2012, oktobar 2011, januar 2011)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D ograničena lukom krive $x^2+y^2=8x-12$ u I kvadrantu.
399. (januar 2015, oktobar 2010)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D ograničena lukom krive $x^2+y^2=8x-12$ u IV kvadrantu.
400. (januar 2024, februar 2014, januar 2011)
Izračunati integral: $\iint_D xydxdy$, gde je oblast D ograničena lukom krive $x^2+y^2=8y-12$ u I kvadrantu.
401. (januar 2014, septembar 2009)
Izračunati integral: $\iint_D xydxdy$, gde je oblast D ograničena lukom krive $x^2+y^2=8y-12$ u II kvadrantu.
402. (septembar 2022, decembar 2011-apsolventski, januar 2011, januar 2009)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D ograničena lukom krive $x^2+y^2+5=6x$ u IV kvadrantu.
403. (oktobar 2 2022)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D ograničena lukom krive $x^2+y^2+7=6x$ u I kvadrantu.
404. (februar 2015)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D ograničena lukom krive $x^2+y^2=6y-5$ u II kvadrantu.

405. (jun 2014)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D xydxdy$, gde je D oblast ograničena krivom $y - x^2 = -3$ i x-osom.

406. (jun 2014, januar 2009-usmeni)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D (x-y)dxdy$ gde je oblast D ograničena linijama $y + x^2 = 2$ i $y + 1 = 2x$.

407. (oktobar 2 2023, februar 2018)
Izračunati dvojni integral: $\iint_D (x+y)dxdy$, gde je D oblast ograničena krivom $y^2 = x$ i pravom $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

408. (septembar 2024, februar 2014, oktobar-2 2010-usmeni)
Izračunati integral: $\iint_D (x+2y)dxdy$, ako je oblast D ograničena krivama $y = x^2$ i $x = y^2$.
409. (oktobar 2 2024, jun 2023)
Izračunati integral: $\iint_D (2x+y)dxdy$, ako je oblast D ograničena krivama $y = x^2$ i $x = y^2$.
410.(oktobar 2018)
Izračunati integral: $\iint_D (y+yx)dxdy$, ako je oblast D ograničena krivama:
$x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 2x$ u I kvadrantu.
411.(januar 2024, jul 2019, februar 2018, maj 2015)
Izračunati integral: $\iint_D xe^{y^2}dxdy$, ako je oblast D ograničena krivama $y = x^2, x = 0$ i $y = 4$.
412.(jun 2015)
Izračunati integral: $\iint_D \frac{y}{1+xy}dxdy$, ako je oblast D ograničena krivama $y = 0, x = 0, y = 1ix = 1$.
413. (januar 2023, oktobar-2 2020-usmeni, februar 2016-usmeni, januar 2014-usmeni, januar 2012-usmeni , oktobar-2 2010-usmeni, jun 2009-usmeni)
Promeniti poredak integracije kod dvojnog integrala $\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} f(x,y)dy$.

10. DEO
DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

U desetom delu upoznaćete se sa zadacima u kojima se rešavaju diferencijalne jednačine.

Najpre su dati zadaci sa diferencijalnim jednačinama prvog reda i to grupisani po tipovima (diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive, homogena diferencijalna jednačina, linearna diferencijalna jednačina i Bernulijeva diferencijalna jednačina).

Zatim su dati zadaci sa diferencijalnim jednačinama drugog reda takođe grupisane po tipovima (diferencijalna jednačina koja ne sadrži x, diferencijalna jednačina koja ne sadrži y, linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima).

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima
2. Nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima
3. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda
4. Bernulijeva diferencijalna jednačina
5. Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivim
6. Homogena diferencijalna jednačina prvog reda
7. Linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

---

Definicija 1: (osnovni pojmovi)

Jednačina oblika $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, gde je y = y(x) funkcija nezavisne promenljive x, a y',y'',...,$y^{(n)}$ prvi, drugi,..., n-ti izvod ove funkcije po promenljivoj x, je diferencijalna jednačina n-tog reda.
Red diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji se u njoj pojavljuje.
Svaka funkcija y = φ(x) koja identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu je rešenje te diferencijalne jednačine.
Funkcija y = φ(x,C_1,C_2,...,C_n) koja sadrži n proizvoljnih i nezavisnih konstanti C_1,C_2,...,C_n, a koja identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu je njeno opšte rešenje ili opšti integral.
Rešenje koje se dobija iz opšteg rešenja dajući proizvoljnim konstantama C_1,C_2,...,C_n određene vrednosti C_{10},C_{20},...,C_{n0}, je partikularno rešenje diferencijalne jednačine.
Ako diferencijalna jednačina ima i takvo rešenje y = g(x) koje se ne može dobiti iz njenog opšteg rešenja, ni za koje vrednosti proizvoljnih konstanti C_1,C_2,...,C_n, onda se takvo rešenje naziva singularno rešenje diferencijalne jednačine.
Opšte rešenje diferencijalne jednačine u koordinatnom sistemu predstavlja familiju krivih linija koje zavise od n parametara C_1,C_2,...,C_n. Te krive linije zovu se integralne krive diferencijalne jednačine.
Ako je data familija krivih linija i ako iz sistema koji sadrži n + 1 jednačinu, $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), y' = \frac{d\varphi}{dx}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^n\varphi}{dx^n}$, eliminišemo parametre C_1,C_2,...,C_n, dobijamo diferencijalnu jednačinu čiji je opšti integral ta familija krivih linija.

Teorema 1: (Košijeva teorema)

Ako su funkcija $f(x, y)$i njen prvi parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial x}$neprekidni u oblasti$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ravni xOy, tada za svaku tačku A(x_0,y_0) unutar oblasti D, postoji samo jedno rešenje diferencijalne jednačine y = φ(x) koje zadovoljava početni uslov y = $y_0$za x = x_0 (y_0 = φ(x_0)). Geometrijski to znači, da kroz svaku tačku A(x_0,y_0) i unutar oblasti D prolazi jedna i samo jedna integralna kriva y = φ(x) diferencijalne jednačine.

Definicija 2: (jednačina koja razdvaja promenljive)

To je diferencijalna jednačina oblika $y' = P(x) \cdot Q(y)$.Kako je $y' = \frac{dy}{dx}$,imamo $\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx$, a odatle se integracijom dobija opšte rešenje $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C$, gde je C proizvoljna konstanta.

Definicija 3: (homogena diferencijalna jednačina)

To je jednačina oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Smenom $\frac{y}{x} = z$gde je $z$nova funkcija od x, svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive $\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$.
Neka je njeno opšte rešenje z = φ(x,C). Tada je, zbog y = zx, opšte rešenje homogene jednačine $y = x\varphi(x, C)$.

Definicija 4: (linearna diferencijalna jednačina)

To je jednačina oblika $y' + P(x)y = Q(x)$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine dato je sa
$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx\right]$.

Definicija 5: (Bernulijeva jednačina)

To je jednačina oblika $y' + P(x)y = Q(x)y^s$. Deoba obe strane sa y^s daje $\frac{y'}{y^s} + P(x)y^{1-s} = Q(x)$. a odavde smenom $z = y^{1-s}, z' = (1-s)\frac{y'}{y^s}$, dobijamo linearnu jednačinu po novoj nepoznatoj funkciji z $z' + (1-s)P(x)z = (1-s)Q(x)$.

Definicija 6: (diferencijalna jednačina koja ne sadrži y)

To je jednačina oblika $F(x, y', y'') = 0$. Smenom y' = p, y'' = p', svodi se na jednačinu prvog reda po funkciji p: $F(x, p, p') = 0$.
Ako je njeno opšte rešenje $p = \varphi(x, C_1)$, tada je zbog p = y', y' = φ(x,C_1), te je $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$, što predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine.

Definicija 7: (diferencijalna jednačina koja ne sadrži x)

To je jednačina oblika $\Phi(y, y', y'') = 0$.Smenom $y' = p$, koja daje $y'' = \frac{dp}{dx}$, odnosno $y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$ ili $y'' = \frac{dp}{dy}p$, jednačina postaje $\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}p\right) = 0$, tj. diferencijalna jednačina prvog reda funkcije p po nezavisnoj promenljivoj y. Ako je njeno opšte rešenje $p = \varphi(y, C_1)$, tada je, zbog y' = p, $y' = \varphi(y, C_1)$tj. $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = dx$što, posle integracije, daje $f(y, C_1) = x + C_2$ i predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine.

Definicija 8: (homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima)

To je jednačina oblika $ay'' + by' + cy = 0$.Njeno opšte rešenje je oblika $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$gde su C_1 i C_2 proizvoljne i međusobno nezavisne konstante a $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$ dva linearno nezavisna rešenja diferencijalne jednačine.
Da bi funkcije y_1 i y_2 bile linearno nezavisne potrebno je da je $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$.Rešenja y_1 i y_2 zovemo osnovna rešenja.Osnovna rešenja tražimo u obliku $y=e^{rx}$,gde je r konstanta koju treba odrediti. Kako je $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$, to, zamenom u diferencijalnu jednačinu, dobijamo posle skraćivanja sa e^{rx},$ar^2 + br + c = 0$. Prethodna jednačina je karakteristična jednačina diferencijalne jednačine. Neka su r_1 i r_2 koreni karakteristične jednačine. Mogu da nastupe tri slučaja:
1) Ako je $D = b^2 - 4ac > 0$, tada je $r_1 \neq r_2$ pa je opšte rešenje diferencijalne jednačine$y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$.
2) Ako je D = 0, tada je $r_1 = r_2$ pa je$y_h = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_2x}$.
3) Ako je D < 0, tada je $r_{1,2} = u \pm iv$, pa je$y_h = e^{ux}(C_1cosvx + C_2sinvx)$.

Definicija 9: (nehomogena linearna diferencijalna jednačina)

To je jednačina oblika $ay'' + by' + cy = f(x) \neq 0$.Opšte rešenje te jednačine se dobija kao zbir njenog homogenog dela, y_h, i njenog partikularnog rešenja, y_p, tj. $y = y_h + y_p$.Oblik u kome se traži partikularno rešenje, y_p, zavisi od oblika date funkcije f(x). Mi ćemo posmatrati ovde sledeće jednačine:

1) $ay'' + by' + cy = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$.

Partikularno rešenje se traži u obliku:
a) $y_p = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$,ako je $c \neq 0$ (postoji y),
b) $y_p = x(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$,ako je $c = 0, b \neq 0$ (nema y, ali ima y')
c) $y_p = x^2(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$,ako je $c = 0, b = 0, a \neq 0$ (nema ni y, ni y')

2) $ay'' + by' + cy = Ae^{px}$.

Partikularno rešenje se traži u obliku:
a) $y_p = ae^{px}$,za $p \neq r_1$ i $p \neq r_2$.
b) $y_p = axe^{px}$,za $p = r_1$ili$p = r_2 (r_1 \neq r_2)$.
c) $y_p = ax^2e^{px}$,za $p = r_1 = r_2$.

3) $ay" + by' + cy = Asin(\beta x) + Bcos(\beta x)$.

Partikularno rešenje traži se u obliku:
a) $y_p = asin(\beta x) + bcos(\beta x) za r_{1,2} \neq \pm i\beta$,
b) $y_p = x\big(asin(\beta x) + bcos(\beta x)\big) za r_{1,2} = \pm i\beta$.

4) $ay" + by' + cy = (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0)e^{px}$.

Smenom $y = ze^{px}$,gde je $z$nova nepoznata funkcija, svodi se na slučaj 1.

5) $ay" + by' + cy = \big(Asin(\beta x) + Bcos(\beta x)\big)e^{px}$.

Smenom $y = ze^{px}$,gde je $z$nova nepoznata funkcija, svodi se na slučaj 4.

6) Ako je $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, gde su $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$funkcije iz tačaka1 do 5, onda se partikularno rešenje traži u obliku zbira partikularnih rešenja pojedinih funkcija, tj. $y_p = y_{p1} + y_{p2} + \dots + y_{pn}$.

---

414. (februar 2016, januar 2011)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
415. (januar 2017)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $(x^2+9)dy + xydx = xdx$.
416. (april 2022, april 2017, oktobar 2014, oktobar 2010, oktobar 2009)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:$x + xy + y'(y + xy) = 0$.
417. (oktobar 2016, januar 2015, jul 2014, januar 2013, januar 2010, jun 2009)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = 2x^2y + 3xy - 4y$.
418. (jul 2016, januar 2015, februar 2013, januar 2013, januar 2010)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x$.
419. (februar 2015)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y' = 2y^2 + 12y + 22 + (x^2 - 3x)y'$.
420. (januar 2020, februar 2016, januar 2016, jun 2013, septembar 2012, januar 2010, oktobar 2009)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right)$.
421. (januar 2024, oktobar 2 2023, oktobar 2 2022, oktobar 2021, april 2021-usmeni, jul 2013, oktobar 2010)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y'x + ylnx = y + ylny$.
422. (januar 2017)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.
423. (oktobar 2 2021-usmeni, jun 2014-usmeni, oktobar 2011-usmeni, oktobar-2 2009-usmeni)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $2x(x^2 + y)dx = dy$.
424. (februar 2016, februar 2011-usmeni)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y + x^2sinx = xy'$.
425. (septembar 2023)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y' + ysinx = sinx$.
426. (januar 2017)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y + x^2cosx = xy'$.
427. (januar 2018)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $xy' + 2y = x^2$.
428. (januar 2018)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $xy' + 2y + x = x^2 + 1$.
429. (septembar 2022)
Naći opšte rešenje diferenijalne jednačine: $x^2(x^3+1)y' + x(4x^3+1)y = x^3 - 2$
430. (jul 2020-usmeni, oktobar 2010-usmeni, januar 2009)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y' - y = 2x^2\sqrt{y}$.
431. (februar 2016-usmeni, januar 2014-usmeni, januar 2009-usmeni)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $2y' + y^3x = y$.
432. (septembar 2017)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $xy' = y + x^4y^3$.
433. (januar 2023, januar 2018)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $xy' + 2y = \sqrt{y}$.
434. (jul 2019, januar 2011)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + y = sinx$.

435. (februar 2022, februar 2019, jun 2010)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" + 2y' + y = (1 + x)e^{-x}$.
436. (septembar 2024)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 2y' + y = x^2e^x$.
437. (januar 2015, jun 2013, januar 2010, septembar 2009)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 4y' + 4y = (1 - x)e^{2x}$.
438. (februar 2013)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 4y' + 3y = (1 - x)e^{2x}$.
439. (februar 2019)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 4y' + 3y = (1 - x)e^{2x} + x$.
440. (februar 2019, januar 2014, februar 2012, septembar 2010)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 2y' + y = x^2e^x$.
441. (februar 2019)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 2y' - 3y = e^x cos2x$
442. (januar 2012, septembar 2010)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 7y' + 12y = 3x + e^{4x}$.
443. (oktobar 2023, februar 2017, februar 2016, februar 2015,jun 2014, februar 2011, januar 2009-usmeni)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 7y' + 12y = 4x + e^{3x}$.
444. (oktobar 2024, januar 2024)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + 7y' + 12y = e^{-3x} - 4x$.
445.(januar 2014-usmeni)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" - 3y' + 2y = xe^x - 6sinx$.
446. (april 2022, januar 2017)
Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y" + 2y' = 9xe^x + 5sinx$.
447. (januar 2015-usmeni)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + 17y' + 72y = e^{-9x} - 8x$.
448. (oktobar 2022, januar 2010)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + 17y' + 72y = e^{-8x} - 9x$.
449. (jul 2022, januar 2011)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 17y' + 72y = e^{8x} + 9x$.
450.(januar 2024, februar 2023, februar 2015, januar 2009)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + 16y = sin(4x) + 4x$.
451. (jul 2024)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 16y = e^{4x} + 4x$.
452.(oktobar 2 2024, jun 2023)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + 9y = sin(3x) + 3x$
453. (april 2023, oktobar-2 2018, oktobar-2 2016, oktobar-2 2014)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 2y' = sin(2x) + x$.
454. (januar 2020, januar 2016, januar 2012)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - y' = sinx + e^{-x}$.
455. (januar 2016, jun 2010)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" + y' = sinx + e^{-x}$.
456. (januar 2012)
Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 7y' = x + e^{7x}$.
457. (oktobar 2019, januar 2011, septembar 2010, oktobar-2 2009)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 4y' + 3y = sin(3x) + e^{3x}$.
458. (januar 2024, februar 2023, jun 2010-usmeni, septembar 2009-usmeni, januar 2009)
Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine: $y" - 9y = 3x + e^{3x}$.
459. (januar 2016-usmeni)
Postaviti diferencijalnu jednačinu čije će opšte rešenje glasiti:$y = C_1sin2x + C_2cos2x$.
460. (januar 2013-usmeni)
Postaviti diferencijalnu jednačinu čije će opšte rešenje glasiti:$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.
461. (januar 2024)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine: $3y_{t+1} + 2y_t = 1$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslov $y_0 = 0$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
462. (oktobar 2024, januar 2024)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine: $4y_{t+1} + y_t = 1$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslov $y_0 = 0$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
463. (septembar 2018-usmeni)
Rešiti diferencnu jednačinu:
$y(x + 2) - 8y(x + 1) + 16y = 9$
464.(oktobar 2021, januar 2019)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $2y_{t+2} - 7y_{t+1} + 3y_t = 6$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 2$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.

465. (oktobar 2 2023, oktobar 2 2021)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $6y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 12$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 2$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
466. (januar 2024)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine: $6y_{t+2} - 13y_{t+1} + 6y_t = -1$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $y_1 = 1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
467.(januar 2019)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $9y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 2$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
468. (oktobar 2 2024, jun 2023)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $9y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 8$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 2$ i $y_1 = 1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
469.(oktobar 2022)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $9y_{t+2} - 9y_{t+1} + 2y_t = 2$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
470. (jul 2023, septembar 2022, jul 2020, januar 2019, jul 2018)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $6y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 8$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
471. (jul 2022, januar 2019, jun 2018)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $2y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 6$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
472. (septembar 2023, januar 2023, jul 2021, oktobar-2 2020)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
473. (januar 2021)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $28y_{t+2} + 29y_{t+1} + 6y_t = 2$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
474. (april 2021)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $28y_{t+2} + 13y_{t+1} - 6y_t = 2$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
475. (januar 2022)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $21y_{n+2} - 10y_{n+1} + y_n = 12$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $y_1 = 2$ i diskutovati njegovo asimptotsko ponašanje.
476. (februar 2022)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $21y_{n+2} + 9y_{n+1} - 6y_n = 24$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $y_1 = 2$ i diskutovati njegovo asimptotsko ponašanje.
477. (januar 2022)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $21y_{n+2} + 23y_{n+1} + 6y_n = 100$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $y_1 = 2$ i diskutovati njegovo asimptotsko ponašanje.
478. (oktobar 2 2022, april 2022)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $21y_{t+2} - 4y_{t+1} - y_t = 32$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $2y_1 = -2$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
479. (februar 2023)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $12y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 5$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $y_1 = 0$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
480. (april 2023)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $12y_{t+2} + y_{t+1} - 6y_t = 7$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $y_1 = 0$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
481. (oktobar 2023, februar 2023)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $12y_{t+2} - 17y_{t+1} + 6y_t = 1$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $y_1 = 0$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
482. (januar 2024)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $12y_{t+2} + 25y_{t+1} + 12y_t = 49$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -3$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
483. (septembar 2024)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $12y_{t+2} - 25y_{t+1} + 12y_t = -1$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.
484. (jul 2024)
Naći opšte rešenje diferencne jednačine $3y_{t+2} + 10y_{t+1} + 3y_t = 16$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -1$ i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.

11. DEO VEROVATNOĆA

U jedanaestom delu upoznaćete se sa zadacima iz verovatnoće.

Zadaci su grupisani od lakših ka težim.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Uslovna verovatnoća (definicija i osnovne osobine)
2. Pojam verovatnoće (definicija i osnovne osobine)
3. Bajesova formula
4. Uslovna verovatnoća i nezavisni događaji

Definicija 1: (verovatnoća i događaj)

Elementarni događaji su mogući ishodi slučajnih eksperimenata. Označavaju se sa ω_i ($i \in I$), a skup svih takvih elementarnih događaja označavamo sa Ω i nazivamo prostorom elementarnih događaja ili prostorom mogućih ishoda.
Događaj će biti svaki podskup skupa Ω.
Presek događaja A i B označavamo sa $A \cdot B$, ili samo sa AB, i definišemo sa: $AB = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.
Slično, unija se definiše sa: $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$,
a specijalno, kada $AB = \emptyset$, uniju označavamo sa A + B.

Komplement, odnosno suprotan događaj, $\bar{A}$događaja Aje $\bar{A} = \Omega \backslash A$.
Skup Ω nazivamo izvesnim, a $\emptyset$ nemogućim događajem.
Kada je skup Ω konačan, a mi ćemo to ovde uvek pretpostavljati, verovatnoću nekog slučajnog događaja $A \subset \Omega$, u oznaci P(A), definišemo kao: $P(A) = \frac{m}{n}$, gde je n ukupan broj mogućih, a m ukupan broj povoljnih događaja, pod pretpostavkom da su svi elementarni događaji jednako verovatni. Biće naime: $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, gde smo sa $p(\omega)$ označili verovatnoću elementarnog doga|aja ω. Ovakva funkcija P ima sledeće osobine:

$$0 \leq P(A) \leq 1, za\ svaki\ A$$
$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Specijalno, ako $AB = \emptyset$, onda $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Definicija 2: (uslovna verovatnoća i nezavisni događaji)

Uslovnu verovatnoću $P(B \mid A)$ događaja B pod uslovom da se ostvari događaj A, pretpostavljajući da je $P(A) > 0$, definišemo kao: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.Ovako definisana funkcija uslovne verovatnoće ima sledeće osobine:

$$0 \leq P(B|A) \leq 1$$
$$P(\emptyset|A) = 0$$
$$P(A|A) = 1$$
$$P(B|A) = 1,\ ako\ je\ A \subset B$$
$$P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A),\ ako\ je\ BC = \emptyset$$
$$P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1$$

Formula potpune verovatnoće. Niz skupova $A_1, \ldots, A_n$ nazivamo razbijanjem izvesnog događaja Ω ako je $A_i A_j = \emptyset$, za sve $i \neq j$, i, $A_1 + \ldots + A_n = \Omega$. Još se kaže da ovakva kolekcija skupova čini potpun sistem događaja, i za njega, uz pretpostavku $P(A_i) > 0$, za svaki i važi: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i)$, gde je $B \subset \Omega$ proizvoljan događaj.
Specijalno za $0 < P(A) < 1$: $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$.
Za događaje A i B kažemo da su nezavisni ako je $P(AB) = P(A)\,P(B)$. Stoga se nezavisnost događaja može okarakterisati i uslovom: $P(B \mid A) = P(B)$.

---

485. (januar 2014, januar 2012)

U kutiji se nalazi 30 belih i 10 crvenih kuglica.

a) Izvlačimo četiri kuglice iz kutije, jednu za drugom, tako što svaki put ponovo vratimo izvučenu kuglicu u kutiju, da bi izvlačenje ponovili iz kutije sa početnim brojem kuglica.

b) izvlačimo 4 kuglice iz kutije, odjednom
Naći verovatnoću da će od četiri izvučene kuglice dve biti bele i dve crvene.

486. (januar 2018, januar 2011, januar 2011-usmeni, januar 2010)
Iz kutije u kojoj se nalazi 6 crvenih i 8 plavih kuglica na slučajan način izvlačimo tri kuglice:
a) odjednom
b) jednu za drugom sa vraćanjem.
Kolike su verovatnoće događaja: A - da izvučemo sve tri kuglice iste boje i B - da izvučemo tri kuglice plave boje.

487. (septembar 2014, oktobar-2 2013-usmeni, februar 2013, februar 2013-usmeni, januar 2012, septembar 2010-usmeni)
Da bi pronašao jednu knjigu, student ima nameru da obiđe tri biblioteke. Za svaku od biblioteka je jednako verovatno da nema, odnosno da ima tu knjigu u svom knjižnom fondu, a takođe, ako biblioteka ima knjigu, verovatnoća da je ta knjiga slobodna jednaka je verovatnoći da je ista zauzeta. Kolika je verovatnoća da će student dobiti traženu knjigu?

488. (oktobar 2018)
U prvoj kutiji je 5 belih i 10 crvenih, a u drugoj 3 bele i 7 crvenih kuglica. Iz druge kutije smo u prvu prebacili jednu kuglicu, a zatim smo iz prve kutije izvukli jednu kuglicu. Koja je verovatnoća da smo izvukli belu kuglicu?

489. (januar 2018, januar 2011, jun 2009, januar 2009)
Iz kutije u kojoj se nalazi 6 crvenih i 8 plavih kuglica na slučajan način izvlačimo 4 kuglice:
a) odjednom
b) jednu za drugom sa vraćanjem.
Kolike su verovatnoće događaja: A - da izvučemo sve 4 kuglice iste boje i B - da izvučemo bar dve kuglice plave boje?

490. (februar 2014, februar 2011-usmeni , januar 2010)
Iz kutije u kojoj se nalazi 7 belih, 8 crvenih i 9 zelenih kuglica izvučene su odjednom 2 kuglice. Ispostavilo se da su te 2 kuglice različitih boja. Naći verovatnoću događaja A da je jedna od njih bela i jedna crvena i događaja B da je jedna od njih bela.

491. (jul 2014-usmeni, januar 2013-usmeni, januar 2012-usmeni, oktobar-2 2010, januar 2010)
U kutiji se nalaze dve kocke. Jednoj su tri polja označena brojem 1 i tri preostala polja brojem 2, dok su drugoj dva polja označena brojem 1, a preostala četiri polja brojem 2. Slučajno izvlačimo jednu kocku i bacamo je. Pretpostavimo da se pojavio broj 1. Koja je verovatnoća da smo izvukli prvu kocku?

492. (septembar 2013)
Iz kutije u kojoj se nalazi 8 belih i 9 crvenih kuglica jedna kuglica je izgubljena. Da bismo, na osnovu eksperimenta, izveli zaključak o boji izgubljene kuglice, izvukli smo odjednom 3 kuglice i to 1 belu i 2 crvene. Naći verovatnoću događaja B da je izgubljena kuglica bele boje i događaja C da je izgubljena kuglica crvene boje.

493. (februar 2015, decembar 2011-apsolventski, oktobar 2011, januar 2010)
U prvoj kutiji ima b – belih i c – crvenih, a u drugoj x – belih i y – crvenih kuglica.
a) Iz prve kutije prebacujemo jednu kuglicu u drugu kutiju, ne obraćajući pažnju na njenu boju. Nakon toga, iz druge kutije izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je verovatnoća događaja A da je izvučena kuglica bele boje?
b) Pretpostavljajući da je $b\geq 3$ i $c\geq 3$, iz prve kutije prebacujemo 3 kuglice u drugu kutiju, ne obraćajući pažnju na njihove boje. Posle toga, iz druge kutije izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je verovatnoća događaja B da je izvučena kuglica bele boje?

494. (februar 2018, februar 2016)
Iz kutije u kojoj se nalazi b ($b\geq 2$) belih i c ($c\geq 2$) crvenih kuglica na slučajan način izvlačimo a $(2 \leq a \leq b + c)$ kuglica.
Kolike su verovatnoće događaja: A – da izvučemo sve kuglice iste boje i B – da izvučemo bar 2 kuglice bele boje, ukoliko kuglice izvlačimo:
a) odjednom
b) jednu za drugom sa vraćanjem?

495. (oktobar-2 2016-usmeni, oktobar-2 2014-usmeni, jul 2013)
U ruletu, u jednoj igri, kuglica se može zaustaviti na jednom od polja označenih brojevima od 0 do 36. Posmatramo rezultat 13 određenih igara. Kolika je verovatnoća da se u posmatranim igrama kuglica zaustavi:
A – redom na svakom od brojeva 1 do 13 po jednom
B - na svakom od brojeva od 1 do 13 po jednom
C – svaki put na istom broju
D – svaki put na broju 3?

496. (oktobar 2016, januar 2016-usmeni, februar 2011)
Bacaju se dva novčića četiri puta.
a) Odrediti verovatnoću događaja da u sva četiri bacanja padne ista strana na oba novčića
b) Odrediti verovatnoću događaja da u sva četiri bacanja na novčićima padne različita strana
c) Odrediti verovatnoću događaja da u jednom bacanju na novčićima padnu iste, a u preostala tri bacanja različite strane.

12. DEO
FINANSIJSKA MATEMATIKA

U dvanaestom delu upoznaćete se sa zadacima iz finansijske matematike.

Ova oblast retko dolazi na ispitu i ovde su dati primeri zadataka koji se uglavnom ponavljaju na ispitu.

Teorijska pitanja na usmenom:

1. Nominalna i efektivna interesna stopa (definicija, međusobni odnosi i osnovne osobine)
2. Složen interesni račun
3. Bajesova formula
4. Prost interesni račun
5. Funkcija akumulacije i funkcija stope rasta akumulacije (definicija i osnovne osobine)

Definicija 1: (procentni račun)

U procentnom računu se javljaju sledeće veličine: G – glavnica (osnovna veličina), P – prinos, p – procenat, tj. broj jedinica prinosa na svakih 100 jedinica glavnice. Veličine G, P i p stoje u proporciji G : P = 100 : p, odakle se dobijaju veličine: $G = \frac{100\cdot P}{p}$, $P = \frac{G\cdot p}{100}$, $p = \frac{100\cdot P}{G}$.Iz početne proporcije sledi proporcija
G : 100 = P : p, iz koje se dobija produžena proporcija (G ± P) : (100 ± p) = G : 100 = P : p.
Iz nje nalazimo prinos $P = \frac{(G\pm P)p}{100\pm p}$i glavnicu $G = \frac{(G\pm P)\cdot 100}{100\pm p}$, za slučajeve kada je glavnica uvećana ili umanjena prinosom.

Definicija 2: (interesni račun)

U interesnim računima javljaju se sledeće veličine: K – kapital,i – interes, p – interesna stopa koja kazuje koliko se novčanih jedinica interesa plaća na 100 dinara kapitala za jednu godinu, t – vreme koje može biti dato u godinama g, mesecima m i u danima d.
Koriste se stalni brojevi 100 kada je vreme dato u godinama, 1200 kada je vreme dato u mesecima i 36000 ili 36500 kada je vreme dato u danima, zavisno da li godinu računamo kao 360 ili 365 dana.
Veličine K, i, p i t stoje u proporciji
$$K{:}i = 100{:}p\cdot g \qquad K{:}i = 36000{:}p\cdot d$$
$$K{:}i = 1200{:}p\cdot m \qquad K{:}i = 36500{:}p\cdot d$$
odakle se dobijaju veličine K, i, p i t.
Izračunavanje ukupnog interesa i kod potrošačkog kredita od K dinara, uzetog na n jednakih otplata uz godišnju interesnu stopu od p% je $i = \frac{K\cdot p\cdot(n+1)}{2400}$.

Definicija 3: (složen interesni račun)

Krajnja vrednost kapitala K_n (uvećani ulog zajedno sa interesom na interes) pri godišnjem kapitalisanju nakon n godina je $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$,gde je K_0 početni kapital a p dekurzivna interesna stopa. Kapitalisanje pored godišnjeg u oznaci (pa) može biti šestomesečno (ps), tromesečno (pd), mesečno (pm), dnevno i neprekidno.
Računanje i odobravanje kamate na kraju određenog vremenskog intervala zove se dekurzivno računanje interesa i označava se slovom d uz interesnu stopu. Tako (pa) d znači da je interesna stopa p% godišnja.
Ako se kapitalisanje vrši m puta godišnje uz interesnu stopu p% tada je krajnja vrednost kapitala K_0 posle n godina $K_{mn} = K_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}$.
Ako je kapitalisanje neprekidno uz godišnju interesnu stopu p%, tada je krajnja vrednost kapitala K_0 posle vremena t koje je dato u godinama (t ne mora biti ceo broj) jednaka $K_t = K_0 e^{\frac{pt}{100}}$.
Neka je p_1% interesna stopa pri kapitalisanju m puta godišnje, a p% godišnja interesna stopa pri neprekidnom kapitalisanju. Da bi krajnje vrednosti kapitala, pri neprekidnom kapitalisanju i pri kapitalisanju m puta godišnje, na kraju obračunskog perioda imale iste vrednosti, za interesne stope p i p_1 važi relacija $p = 100\cdot m\cdot ln\left(1+\frac{p_1}{100m}\right)$.

---

497. (jul 2021-usmeni, novembar 2020–usmeni, oktobar-2 2016-usmeni, oktobar 2015, septembar 2015, oktobar-2 2014-usmeni, oktobar 2013, januar 2011-usmeni)
Odrediti funkciju akumulacije i stope rasta akumulacije u računu prostih i računu složenih interesa.
498. (januar 2014)
Odrediti funkciju akumulacije pri konstantnoj stopi rasta akumulacije.

499. (oktobar-2 2016-usmeni, januar 2015-usmeni, januar 2015, oktobar-2 2014-usmeni, oktobar 2013, oktobar 2011-usmeni, jul 2011, oktobar-2 2009-usmeni, septembar 2009)
Odrediti efektivnu godišnju kamatu koja odgovara nominalnoj godišnjoj stopi od 20% uz kapitalisanje:
a) polugodišnje
b) kvartalno
c) neprekidno
500. (oktobar-2 2018-usmeni, januar 2017, februar 2015, februar 2014, januar 2011, januar 2011-usmeni, oktobar 2010, januar 2010)
Odrediti efektivnu godišnju kamatu koja odgovara nominalnoj godišnjoj stopi od 40% uz kapitalisanje:
a) polugodišnje
b) tromesečno
c) neprekidno

REŠENJA

1. Relacija ρ je relacija poretka na skupu realnih brojeva za n = 3. Za n = 4 relacija ρ nije relacija poretka jer npr. nije antisimetrična (2 ρ -2 i -2 ρ 2).
2. Relacija ρ je relacija poretka na skupu prirodnih brojeva, a na skupu celih brojeva nije jer nije antisimetrična (2 ρ-2 i -2 ρ 2).
3. Relacija ρ jeste relacija poretka na skupu $(1,+\infty)$, ali ne i na skupu R, jer na skupu R nije antisimetrična $\left(7\ \rho\ \frac{1}{7}\ i\ \frac{1}{7}\ \rho\ 7\right)$.
4. Re lacija ρ na skupu R zadovoljava osobine refleksivnosti i tranzitivnosti.
5. Relacija ρ jeste relacija poretka na skupu $(1,+\infty)$, ali ne i na skupu R, jer na skupu R nije antisimetrična $\left(7\ \rho\ \frac{1}{7}\ i\ \frac{1}{7}\ \rho\ 7\right)$.
6. Relacija ρ jeste relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije broja 3 je $\left\{-3,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},3\right\}$.
7. Relacija ρ jeste relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije broja 0 je $\{0\}$, klasa ekvivalencije broja 1 je $\{1,-1\}$, a klasa ekvivalencije broja 2 je $\left\{2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$.
8. Relacija ρ jeste relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije broja 0 je $\{0\}$, klasa ekvivalencije broja 1 je $\{1\}$, a klasa ekvivalencije broja 2 je $\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$.
9. Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer nije tranzitivna $\left(7\ \rho\ \frac{1}{7}\ i\ \frac{1}{7}\ \rho-7\ i\ 7\ non\ \rho-7\right)$.
10. Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer nije tranzitivna $(1\ \rho\ 2\ i\ 2\ \rho\ 4\ i\ 1\ non\ \rho\ 4)$.
11. Relacija ρ jeste relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije broja 7 je $\left\{7,\frac{1}{7}\right\}$, a klasa ekvivalencije broja $\frac{2}{7}$ je $\left\{\frac{2}{7},\frac{7}{2}\right\}$.
12. Relacija ρ jeste relacija ekvivalencije.
13. Nad skupom $S=\{1,2,3,4\}$ može se definisati 15 različitih relacija ekvivalencije.
14. Relacija $\rho\cap\rho^{-1}$ jeste relacija ekvivalencije na skupu A, pod uslovom da je ρ refleksivna i tranzitivna.
15. Funkcija $f(x)$ nije ni ni "1-1" ni "NA", pa nije bijekcija. Međutim, ako bi njen domen i kodomen definisali kao $f:[-3,+\infty)\to[-12,+\infty)$, onda bi funkcija $f(x)$ bila bijekcija. Funkcija $g(x)$ je i "1-1" i "NA", pa je bijekcija. Odgovarajuće inverzne funkcije su: $f^{-1}(x)=-3+\sqrt{12+x}, f^{-1}:[-12,+\infty)\to[-2,+\infty)$ i $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}, g^{-1}:R\to R$.
16. Za $a=1\wedge b=1$ funkcija je bijekcija. $f^{-1}(x)=2-\sqrt{1-x}, f^{-1}:[0,1]\to[1,2]$.

17. Sa matricom A su komutativne sve matrice oblika $\begin{pmatrix}\beta-\alpha & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in R$
18. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=0.$
19. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$
20. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}.$
21. $X=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$
22. $X=\frac{1}{31}\begin{pmatrix}21 & -3 & -1\\ 1 & 22 & -3\\ 3 & 4 & 22\end{pmatrix}.$
23. $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & 9 & 1\end{pmatrix}.$
24. $X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$
25. $X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$
26. $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}11\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$
27. Nema rešenja
28. $X=\begin{pmatrix}-9 & 6 & -18\\ 13 & -4 & 24\\ -8 & 2 & -12\end{pmatrix}.$
29. $X=\begin{pmatrix}6 & 0 & -3\\ -33 & -21 & -3\\ -14 & -12 & 1\end{pmatrix}.$

30. $X = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 3 & -21 & 9 \end{pmatrix}$.
31. Za $a \neq -3 \Longrightarrow r(A) = 3, a\ za\ a = -3 \Longrightarrow r(A) = 2$.
32. Kako je $r(A) = 2 \Rightarrow$ Matrica A ima dve linearno nezavisne vrste(kolone).
33. Kako je $r(A) = 2 \Rightarrow$ Matrica A ima dve linearno nezavisne kolone.
34. Kako je $r(A) = 2 \Rightarrow$ Matrica A ima dve linearno nezavisne kolone.
35. Može se formirati više od dva bazisna minora, a dva od njih su na primer:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

36. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.
37. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.
38. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.
39. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.
40. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.
41. $(x, y, z) = (1, 8, -3)$.
42. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$.
43. $(x, y, z) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$.
44. $(x, y, z) = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right)$.
45. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}\right)$.
46. $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}\right)$.
47. $(x, y, z) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
48. $(x, y, z) = (0, 7, -2)$.
49. $(x, y, z) = (3, 8, -4)$.
50. $(x, y, z) = (2, 7, -3)$.
51. $(x, y, z) = (1, 11, -4)$.
52. $(x, y, z) = (1, 8, -3)$.
53. $(x, y, z) = (1, 17, -6)$.
54. $(x, y, z) = (0, 1, 2)$.
55. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.
56. Sistem nema rešenja
57. $(x, y, z) = (2, 26a - 25, 16 - 13a)$.
58. Za $a \neq 1 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$,
a za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja i ona su oblika $(x, y, z) = (\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in R$.
59. Za $k \neq 4 \wedge k \neq -\frac{45}{7} \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$,
za $k = 4 \Longrightarrow$ sistem je ima beskonačno mnogo rešenja oblika: $(x, y, z) = (-2\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in R$.
a za $k = -\frac{45}{7} \Longrightarrow$ sistem je ima beskonačno mnogo rešenja oblika: $(x, y, z) = \left(\frac{33}{20}\alpha, -\frac{67}{140}\alpha, \alpha\right), \alpha \in R$.
60. Za $a \neq 3 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$,
a za $a = 3 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja i ona su oblika $(x, y, z) = (\alpha, 0, -\alpha), \alpha \in R$.
61. Za $a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -2 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$,
za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (-\alpha, 0, \alpha), \alpha \in R$.
za $a = 2 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (-\alpha, \alpha, 3\alpha), \alpha \in R$,
a za $a = -2 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = \left(-\frac{7}{3}\alpha, \alpha, \frac{1}{3}\alpha\right), \alpha \in R$.
62. Za $k \neq 4 \wedge k \neq -\frac{45}{7} \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{-132}{(k-4)(7k+45)}, \frac{-2(5k+13)}{(k-4)(7k+45)}, \frac{2(7k+5)}{(k-4)(7k+45)}\right)$,
za $k = 4 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja,
a za $k = -\frac{45}{7} \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
63. Za $a \neq 1 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$,
a za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = \left(\frac{2\alpha-1}{3}, \frac{2(1-2\alpha)}{3}, \alpha\right), \alpha \in R$.
64. Za $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{a+1}{(a-1)(a+2)}, \frac{-1}{(a-1)(a+2)}, \frac{-1}{(a-1)(a+2)}\right)$,
za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja,
a za $a = -2 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
65. Za $a \neq \frac{4}{3} \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
a za $a = \frac{4}{3} \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = \left(3 - \alpha, \frac{7\alpha-6}{6}, \alpha\right), \alpha \in R$.

66. Za $a \neq 7 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{11}{8}, -\frac{11}{8}, -\frac{13}{8}\right)$,
a za $a = 7 \Longrightarrow$sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (\alpha, 11 - 9\alpha, 8 - 7\alpha), \alpha \in R$.
67. Za $a \neq \frac{34}{7} \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{5(6-a)}{34-7a}, \frac{5(a-8)}{34-7a}, \frac{2(a-12)}{34-7a}\right)$,
a za $a = \frac{34}{7} \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
68. Za $a \neq 5 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{5}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-2}{7}\right)$,
a za $a = 5 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = \left(\alpha, \frac{5-11\alpha}{4}, \frac{3-5\alpha}{2}\right), \alpha \in R$.
69. Sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{a-9}{-2(a^2-3a+3)}, \frac{39-17a}{-2(a^2-3a+3)}, \frac{-9a^2+35a-42}{-2(a^2-3a+3)}\right)$.
70. Za $a \neq 1 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
a za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (5 - 4\alpha, 6 - 5\alpha, \alpha), \alpha \in R$.
71. Za $a \neq 1 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
a za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (5 - 4\alpha, 6 - 5\alpha, \alpha), \alpha \in R$.
72. Za $a \neq 1 \ \wedge \ a \neq -2 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$,
za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja: $(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in R$,
a za $a = -2 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
73. Za $a \neq 0 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (1 - a, a, 0)$,
a za $a = 0 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (1, \alpha, 0), \alpha \in R$.
74. Za $a \neq 0 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (1 - a, a, 0)$,
a za $a = 0 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (1, \alpha, 0), \alpha \in R$.
75. Za $a \neq 3 \ \wedge \ a \neq -3 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{a}{a+3}, \frac{a}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)$,
za $a = 3 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja: $(x, y, z) = (1 - 3\alpha, 1 - 3\alpha, \alpha), \alpha \in R$,
a za $a = -3 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
76. Za $a \neq 3 \ \wedge \ a \neq 4 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{5-2a}{3-a}, 0, \frac{1}{3-a}\right)$,
za $a = 4 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja: $(x, y, z) = (3 - 8\alpha, \alpha, 7\alpha - 1), \alpha \in R$,
a za $a = 3 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
77. Za $a \neq 3 \ \wedge \ a \neq 4 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje : $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, 0, 0\right)$,
za $a = 3 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja: $(x, y, z) = \left(\frac{7-5\alpha}{2}, \alpha, \alpha\right), \alpha \in R$,
a za $a = 4 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja: $(x, y, z) = \left(\frac{7-\alpha}{2}, 0, \alpha\right), \alpha \in R$.
78. Za $a \neq 5 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
a za $a = 5 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja: $(x, y, z, u) = \left(\frac{4-\alpha-6\beta}{5}, \frac{3+3\alpha-7\beta}{5}, \alpha, \beta\right), \alpha, \beta \in R$.
79. Za $a \neq 1 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(-1, -\frac{a^2+2a+3}{3(a-1)}, -\frac{a+2}{a-1}\right)$,
a za $a = 1 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
80. Za $a \neq \frac{10 \pm \sqrt{132}}{8} \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{5a^2-41a+62}{4a^2-10a-2}, \frac{33a-72}{4a^2-10a-2}, \frac{15a-42}{4a^2-10a-2}\right)$,
a za $a = \frac{10 \pm \sqrt{132}}{8} \Longrightarrow$ sistem je protivrečan, tj. nema rešenja.
81. Za $a \neq -1 \Longrightarrow$ sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (0, -2, 0)$,
a za $a = -1 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (4\alpha, 7\alpha - 2, \alpha), \alpha \in R$.
82. Za $a \neq 7 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja,
a za $a = 7 \Longrightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z, u) = (1, -\alpha, 0, \alpha), \alpha \in R$.
83. Sistem ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$
84. Za $a \neq -5 \ \wedge \ a \neq 2 \Longrightarrow$ sist. ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{a^2+6a-2b-8-3ab}{(a-2)(a+5)}, -\frac{4(b-1)}{(a-2)(a+5)}, \frac{b-1}{a+5}\right)$.
Za $a = -5 \ \wedge \ b \neq 1 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja.
Za $a = -5 \ \wedge \ b = 1 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x, y, z) = \left(1 - \frac{13}{4}\alpha, \alpha, \frac{7\alpha}{4}\right), \alpha \in R$.
Za $a = 2 \ \wedge \ b \neq 1 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja.
Za $a = 2 \ \wedge \ b = 1 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x, y, z) = (1 + 2\alpha, \alpha, 0), \alpha \in R$.
85. Za $p \neq 7 \ \wedge p \neq -1 \Longrightarrow$ sist. ima jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = \left(\frac{4pq+10q+5p+41}{(p-7)(p+1)}, \frac{p-2q-11}{(p-7)(p+1)}, \frac{q+2}{p-7}\right)$.
Za $p = 7 \ \wedge \ q \neq -2 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja.
Za $p = 7 \ \wedge \ q = -2 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x, y, z) = \left(2 - 19\alpha, \alpha, \frac{1-8\alpha}{2}\right), \alpha \in R$.
Za $p = -1 \ \wedge \ q \neq -6 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja.
Za $p = -1 \ \wedge \ q = -6 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x, y, z) = \left(2 - 3\alpha, \alpha, \frac{1}{2}\right), \alpha \in R$.
86. Za $a \neq 1 \Longrightarrow$ sist. ima besk. mnogo rešenja: $(x, y, z, u) = \left(\frac{3+7\alpha}{5}, \alpha, \frac{b-4}{a-1}, \frac{4(a-1)(8\alpha-3)+5(b-4)}{10(a-1)}\right), \alpha \in R$.
Za $a = 1 \ \wedge \ b \neq 4 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja.

Za $a=1 \wedge b=4 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x,y,z,u)=\left(\frac{3+7\alpha}{5},\alpha,2\beta+\frac{4(3-8\alpha)}{5},\beta\right),\alpha,\beta\in R$.

87. Za $a\neq 2 \Longrightarrow$ sist. ima besk. mnogo rešenja: $(x,y,z,u)=\left(\frac{(-23\alpha+4b-13)(a-2)-6(9-b)}{9(a-2)},\frac{(19\alpha+b-10)(a-2)+3(9-b)}{9(a-2)}\alpha,\frac{9-b}{a-2}\right),\alpha\in R$.
Za $a=2 \wedge b\neq 9 \Longrightarrow$ sistem nema rešenja.
Za $a=2 \wedge b=9 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x,y,z,u)=\left(\frac{5\beta+7-6\alpha}{3},\alpha,\beta,\frac{9\alpha-19\beta+1}{3}\right),\alpha,\beta\in R$.

88. Za $a\neq 2 \wedge b\neq 0 \Longrightarrow$ sist. ima besk. mnogo rešenja: $(x,y,z,u)=\left(\frac{6-7\alpha a+10\alpha-(5-b\alpha)(5a-6)}{a-2},\frac{3-2\alpha-a(5-b\alpha)}{a-2},\alpha,5-b\alpha\right),\alpha\in R$.
Za $a\neq 2 \wedge b=0 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x,y,z,u)=\left(2\alpha-\frac{51-35a-7(a-2)\alpha}{2},\alpha,\frac{3-5a-(a-2)\alpha}{2},5\right),\alpha\in R$.
Za $a=2 \wedge b\neq 1 \Longrightarrow$ sistem ima besk. mnogo rešenja: $(x,y,z,u)=\left(2\alpha+\frac{19+9b}{2-2b},\alpha,\frac{-7}{2-2b},\frac{10-3b}{2-2b}\right),\alpha\in R$.
Za $a=2 \wedge b=1 \Longrightarrow$ sistem je protivrečan tj. nema rešenja.

89. Lako se dokaže da je niz monoton i ograničen.
90. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$.
91. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=1$.
92. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{e^2}$.
93. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1 \Rightarrow$niz konvergira.
94. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$.
95. Najpre treba dokazati da je niz ograničen i monoton => niz je konvergentan => niz ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
96. Najpre treba dokazati da je niz ograničen i monoton => niz je konvergentan => niz ima tačno jednu tačku nagomilavanja.
97. Pomoću integralnog kriterijuma konvergencije dokazuje se da je harmonijski red divergentan a hiperharmonijski konvergentan.
98. a) Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$je hipeharmonijski red i kao u prethodnom zadatku treba dokazati pomoću opšteg Košijevog kriterijuma da red konvergira.
b) Kako je$\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^2}$za $n>1$ iz kriterijuma za redove sa pozitivnim članovima => da je konvergentan i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.
99. a) Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$je harmonijski red i kao u zadatku 104. treba dokazati pomoću opšteg Košijevog kriterijuma da red divergira.
b) Kako je $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ za $n>1$ iz kriterijuma za redove sa pozitivnim članovima => da je konvergentan i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
100. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{7}{e}>1$, zaključujemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n n!}{n^n}$ divergentan.
101. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{e}<1$, zaključujemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ konvergentan.
102. Funkcija je neprekidna u tački $x=0$ jer je $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$.
Funkcija nije diferencijabilna u tački $x=0$ jer je $f'_+(0)=+\infty$.

103. Funkcija je neprekidna u tački $x=3$ jer je $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=f(3)=0$.
Funkcija nije diferencijabilna u tački $x=3$ jer je $f'_-(3)=-1\neq f'_+(3)=1$.
104. Funkcija je neprekidna u tački $x=\pi$ jer je $\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=f(\pi)=0$.
Funkcija nije diferencijabilna u tački $x=k\pi$ jer je $f'_-(k\pi)\neq f'_+(k\pi)$.
105. Funkcija je neprekidna u tački $x=k\pi$ jer je $\lim\limits_{x\to k\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi^+}f(x)=f(k\pi)=0$.
Funkcija nije diferencijabilna u tački $x=\pi$ jer je $f'_-(\pi)=-1\neq f'_+(\pi)=1$.
106. Funkcija je diferencijabilna za $x<-1$ jer je $f'(x)=2$.
Funkcija je diferencijabilna za $x>1$ jer je $f'(x)=2$.
Funkcija je diferencijabilna za $-1<x<1$ jer je $f'(x)=2x$.
Funkcija nije diferencijabilna za $x=-1$ jer je $f'_-(-1)=\infty$.
Funkcija je diferencijabilna za $x=1$ jer je $f'_-(1)=f'_+(1)=2$.
Dakle, funkcija je diferencijabilna za svako $x\neq -1$.
107. $y'=\frac{1}{sinx\cdot cosx}$.
108. $y'=12x^3e^{3x^4}$.
109. $y'=-\frac{12x^3}{\sqrt{1-(3x^4+1)^2}}$.
110. $y'=\frac{12x^3}{\sqrt{1-(3x^4+1)^2}}$.
111. $y'=\frac{12x^3}{1+(3x^4+1)^2}$.
112. $y'=\frac{12x^3}{3x^4+1}$.
113. $y'=-12x^3sin(3x^4+1)$.

114. $y' = \dfrac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$.

115. Koristeći nedjednakost $\sin(3x) < 3x < tg(3x)$ koja važi za $0 < x < \frac{\pi}{6}$ i primenom definicije za graničnu vrednost funkcije dokažete najpre da važi $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}$, a onda kako je $f(x) = \frac{\sin(3x)}{2x}$ parna funkcija sledi da je i $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}$, što znači da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}$.

116. $a = 1, b = -\frac{3}{2}$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$.

118. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

119. $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.

120. $sin(x+\Delta x) \approx sinx + cosx\Delta x \Rightarrow sin(28°) \approx 0{,}469821$.

121. $sin(x+\Delta x) \approx sinx + cosx\Delta x \Rightarrow sin(29°) \approx 0{,}484911$.

122. Presečne tačke su $M_1(0,1)$ i $M_2\left(1,\frac{1}{2}\right)$. U prvoj tački jednačina tangente je $y = 1$. U drugoj tački jednačina tangente je $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

123. Data relacija je Maklorenov polinom trećeg stepena funkcije $y = ln\frac{1+x}{1-x}$.

124. $P(x) = 11 + 24(x-2) + 19(x-2)^2 + 7(x-2)^3 + (x-2)^4$.

125. $arctg(2x) \approx 2x - \frac{8}{3}x^3$.

126. $cos^3x \approx 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4$.

127. $g(x) = \cos(sinx) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{24+2x^3+5x^4-24g(x)}{7x^2+2x^3} = \frac{12}{7}$.

128. $g(x) = \ln(\mathrm{cosx} + \mathrm{x}sinx) \approx \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{4g(x)-2x^2+x^3}{3x^3+5x^4} = \frac{1}{3}$.

129. Kako je $P(x) = x^5 + 3x - 11$ polinom neparnog stepena, zaključujemo da taj polinom ima bar jednu realnu nulu. Ukoliko bi imao više od jedne realne nule, npr. a i b i ako je $a < b$, tada bi kako funkcija $f(x) = x^5 + 3x - 11$, zadovoljava sve uslove Rolove teoreme na $[a,b]$ važilo: $\big(\exists\xi \in (a,b)\big)f'(\xi) = 0$. Međutim, kako je $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$, zaključujemo da je početna pretpostavka pogrešna, tj. da jednačina ne može da ima više od jednog realnog rešenja.

130. Kako je $P(x) = x^5 + x^3 + 5x$ polinom neparnog stepena, zaključujemo da taj polinom ima bar jednu realnu nulu. Ukoliko bi imao više od jedne realne nule, npr. a i b i ako je $a < b$, tada bi kako funkcija $f(x) = x^5 + x^3 + 5x$, zadovoljava sve uslove Rolove teoreme na $[a,b]$ važilo: $\big(\exists\xi \in (a,b)\big)f'(\xi) = 0$. Međutim, kako je $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 5 > 0$, zaključujemo da je početna pretpostavka pogrešna, tj. da jednačina ne može da ima više od jednog realnog rešenja.

131. Kako funkcija $f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4)$ ima 5 realnih nula iz Rolove teoreme => da postoje četiri rešenja jednačine $f'(x) = 0$ i to $x_1 \in (-4,-1), x_2 \in (-1,0), x_3 \in (0,1)$ i $x_4 \in (1,3)$.

132. Funkcija $f(x) = \sqrt{x-1}$, zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na $[2,6]$. $\xi = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

133. Neka je $f(x) = sinx$. Kako $f(x)$ zadovoljava sve uslove Lagranžove teoreme na $[a,b] \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{sinb-sina}{b-a} = \frac{sina-sinb}{a-b}$. Kako je $f'(x) = cosx \Rightarrow |f'(x)| \leq 1 \Rightarrow$

$\left|\dfrac{sina - sinb}{a-b}\right| \leq 1 \Rightarrow |sina - sinb| \leq |a-b|$.

134. Za $x = 0 \Rightarrow \ln(x+1) = 0 \Rightarrow \ln(x+1) = x$.

Za $x > 0 \Rightarrow$ U prethodnom zadatku dokazali smo da za $0 < b < a$ važi $\frac{a-b}{a} < ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$. Ako uzmemo da je $a = 1$, a $b = \frac{1}{x+1}$, važiće $0 < b < a$, jer je $x > 0$, pa => $\frac{a-b}{a} < ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, tj. $\frac{x}{x+1} < ln(x+1) < x \Rightarrow ln(x+1) < x$.

Dakle, za $x \geq 0 \Rightarrow \ln(x+1) \leq x$.

135. Kako je $|sinx| \leq |x| \leq |tgx| \Rightarrow (deljenjem\ sa\ |sinx|)\ 1 \leq \left|\frac{x}{sinx}\right| \leq \left|\frac{1}{cosx}\right| \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{sinx} \leq \frac{1}{cosx}\ \left(jer\ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$

$1 \leq \frac{sinx}{x} \leq cosx$. Kako je $\lim\limits_{x\to 0} cos\,x = 1$

iz Leme o 2 policajca => da je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x} = 1$.

136. Neka je $f(x) = x - 3lnx$. Kako je $f(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[1,e]$ i $f(1)\cdot f(e) < 0$, iz Bolcanove teoreme $\Rightarrow \big(\exists\xi \in (1,e)\big)f(\xi) = 0$. Dakle jednačina $f(x) = 0$ ima bar jedno rešenje i to je $x = \xi$.

137. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty,\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{4+x^2} = 0 \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4+x^2} = 0$$

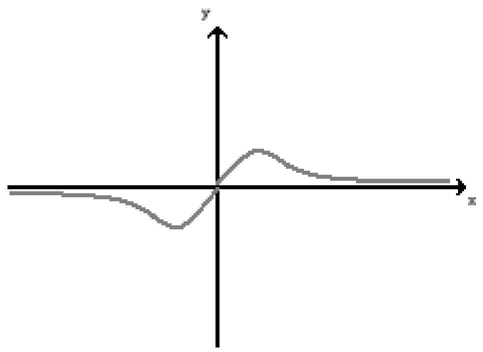
2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y-osom je $y = 0$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty,0)$, a pozitivna za $x \in (0,\infty)$.

4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.

5) Horizontalna asimptota je prava $y = 0$. Nema vertikalne asimptote. Nema kose asimptote.

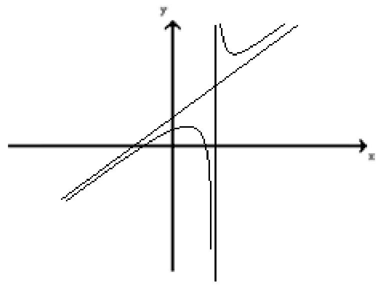
6) $y' = \frac{4(4-x^2)}{(4+x^2)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-2,2)$, a opadajuća za $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $(2,1)$, a minimum u tački $(-2,-1)$.
7) $y'' = \frac{8x(x^2-12)}{(4+x^2)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-2\sqrt{3},0\right) \cup \left(2\sqrt{3},\infty\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\infty,-2\sqrt{3}\right) \cup \left(0,2\sqrt{3}\right)$.
Prevojne tačke su $P_1\left(-2\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2(0,0)$ i $P_3\left(2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



138. Analizom funkcije dobijamo:
1) $D = (-\infty,6) \cup (6,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-15}{x-6} = -\infty \quad \lim_{x\to6^-}\frac{x^2-2x-15}{x-6} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-15}{x-6} = +\infty \quad \lim_{x\to6^+}\frac{x^2-2x-15}{x-6} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -3$ i $x_2 = 5$. Presek sa y-osom je $y = \frac{5}{2}$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty,-3) \cup (5,6)$, a pozitivna za $x \in (-3,5) \cup (6,+\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 6$. Prava $y = x + 4$ je kosa asimptota.
6) $y' = \frac{x^2-12x+27}{(x-6)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty,3) \cup (9,\infty)$, a opadajuća za $x \in (3,6) \cup (6,9)$. Funkcija ima minimum u tački $(9,16)$, a maksimum u tački $(3,4)$.
7) $y'' = \frac{18}{(x-6)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (6,\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty,6)$. Nema prevojnih tačaka.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

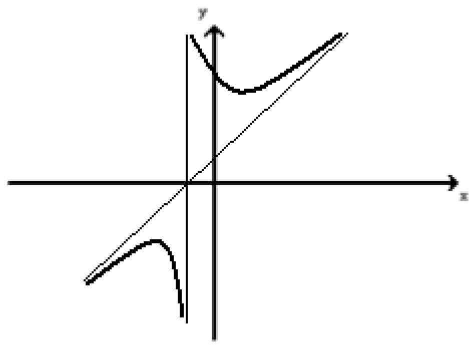


139. Analizom funkcije dobijamo:
1) $D = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+5}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+2x+5}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+5}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+2x+5}{x+1} = +\infty$$

2) Nema nula funkcije. Presek sa y-osom je $y = 5$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty,-1)$, a pozitivna za $x \in (-1,\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -1$. Prava $y = x + 1$ je kosa asimptota.
6) $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$, a opadajuća za $x \in (-3,-1) \cup (-1,1)$. Funkcija ima minimum u tački $(1,4)$, a maksimum u tački $(-3,-4)$.

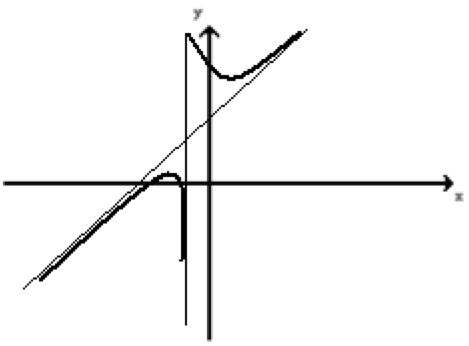
7) $y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$. Nema prevojnih tačaka.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



140. Analizom funkcije dobijamo:
1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+19x+34}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+19x+34}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+19x+34}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+19x+34}{x+1} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -17$ i $x_2 = -2$. Presek sa y-osom je $y = 34$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -17) \cup (-2, -1)$, a pozitivna za $x \in (-17, -2) \cup (-1, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -1$. Prava $y = x + 18$ je kosa asimptota.
6) $y' = \frac{x^2+2x-15}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$, a opadajuća za $x \in (-5, -1) \cup (-1,3)$. Funkcija ima minimum u tački $(3,25)$, a maksimum u tački $(-5,9)$.
7) $y'' = \frac{32}{(x+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$. Nema prevojnih tačaka.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

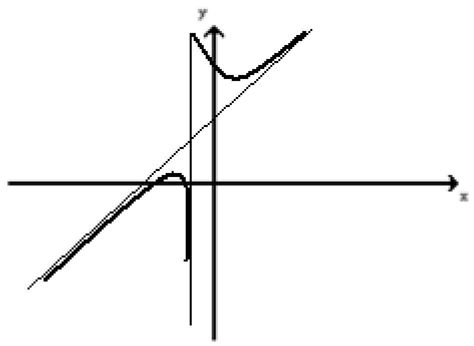


141. Analizom funkcije dobijamo:
1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -5$ i $x_2 = -2$. Presek sa y-osom je $y = 10$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -5) \cup (-2, -1)$, a pozitivna za $x \in (-5, -2) \cup (-1, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -1$. Prava $y = x + 6$ je kosa asimptota.
6) $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, a opadajuća za $x \in (-3, -1) \cup (-1,1)$. Funkcija ima minimum u tački $(1,9)$, a maksimum u tački $(-3,1)$.
7) $y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



142. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D=(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-7x+10}{x-6}=-\infty\ \lim_{x\to6^-}\frac{x^2-7x+10}{x-6}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+10}{x-6}=+\infty\ \lim_{x\to6^+}\frac{x^2-7x+10}{x-6}=+\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1=2$ i $x_2=5$. Presek sa y-osom je $y=-\frac{5}{3}$.

3) Funkcija je negativna za $x\in(-\infty,2)\cup(5,6)$, a pozitivna za $x\in(2,5)\cup(6,+\infty)$.

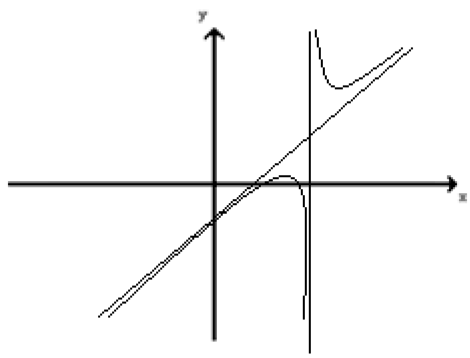
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x=6$. Prava $y=x-1$ je kosa asimptota.

6) $y'=\frac{x^2-12x+32}{(x-6)^2}$ => funkcija je rastuća za $x\in(-\infty,4)\cup(8,+\infty)$, a opadajuća za $x\in(4,6)\cup(6,8)$. Funkcija ima minimum u tački (8,9), a maksimum u tački (4,1).

7) $y''=\frac{8}{(x-6)^3}$ => funkcija je konveksna za $x\in(6,+\infty)$, a konkavna za $x\in(-\infty,6)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



143. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4}{x+1}=-\infty\ \lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+4x+4}{x+1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x+1}=+\infty\ \lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+4}{x+1}=+\infty$$

2) Nula funkcije je $x=-2$. Presek sa y-osom je $y=4$.

3) Funkcija je negativna za $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-1)$, a pozitivna za $x\in(-1,+\infty)$.

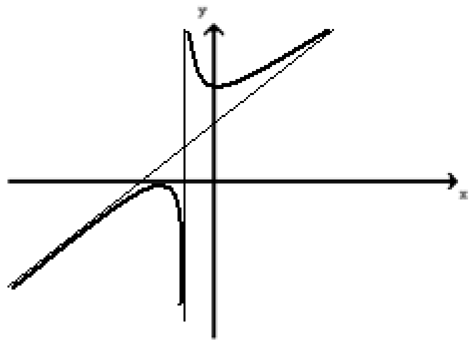
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x=-1$. Prava $y=x+3$ je kosa asimptota.

6) $y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$, a opadajuća za $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$. Funkcija ima minimum u tački (0,4), a maksimum u tački $(-2,0)$.

7) $y''=\frac{2}{(x+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x\in(-1,\infty)$, a konkavna za $x\in(-\infty,-1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



144. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x = -2$ i $x = -10$ Presek sa y-osom je $y = 20$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -10) \cup (-2, -1)$, a pozitivna za $x \in (-10, -2) \cup (-1, +\infty)$.

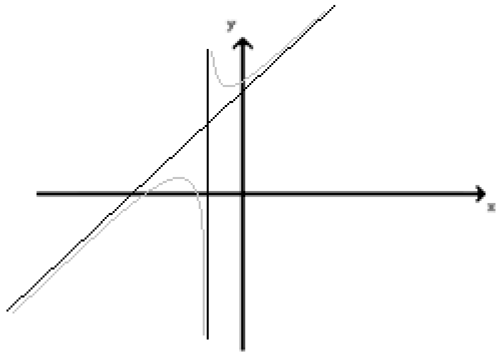
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -1$. Prava $y = x + 11$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-4, -1) \cup (-1, 2)$. Funkcija ima minimum u tački $(2,16)$, a maksimum u tački $(-4, -4)$.

7) $y'' = \frac{18}{(x+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



145. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x-1} = -\infty \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+2x+1}{x-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x-1} = +\infty \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+2x+1}{x-1} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = -1$. Presek sa y-osom je $y = -1$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, a pozitivna za $x \in (1, +\infty)$.

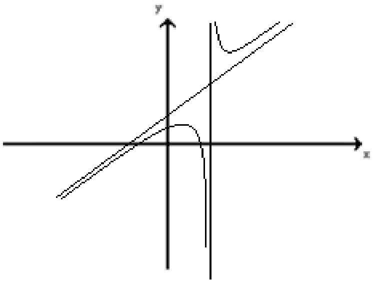
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 1$. Prava $y = x + 3$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$. Funkcija ima minimum u tački $(3,8)$, a maksimum u tački $(-1,0)$.

7) $y'' = \frac{8}{(x-1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (1, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



146. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+13x+10}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{4x^2+13x+10}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+13x+10}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{4x^2+13x+10}{x+1} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -\frac{5}{4}$ i $x_2 = -2$. Presek sa y-osom je $y = 10$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{5}{4}, -1\right)$, a pozitivna za $x \in \left(-2, -\frac{5}{4}\right) \cup (-1, +\infty)$.

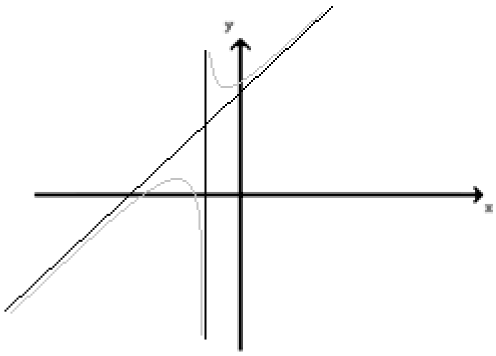
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -1$. Prava $y = 4x + 9$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{4x^2+8x+3}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(-\frac{1}{2}, 9\right)$, a maksimum u tački $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

7) $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



147. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x-2}{x+2}\right) = -\infty \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x-2}{x+2}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-2^-} \left(\frac{x^2-x-2}{x+2}\right) = -\infty \quad \lim_{x\to-2^+} \left(\frac{x^2-x-2}{x+2}\right) = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Presek sa y-osom je $y = -1$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -2) \cup (-1,2)$, a pozitivna za $x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty)$.

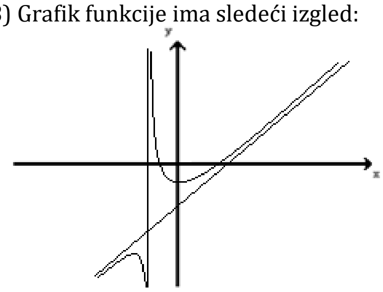
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -2$. Prava $y = x - 3$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-4, -2) \cup (-2,0)$. Funkcija ima minimum u tački $(0, -1)$, a maksimum u tački $(-4, -9)$.

7) $y'' = \frac{8}{(x+2)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-2, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -2)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



148. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8x+7}{x-2} = -\infty \quad \lim_{x\to2^-} \frac{x^2+8x+7}{x-2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8x+7}{x-2} = +\infty \quad \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+8x+7}{x-2} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = -7$. Presek sa y-osom je $y = -\frac{7}{2}$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -7) \cup (-1,2)$, a pozitivna za $x \in (-7, -1) \cup (2, +\infty)$.

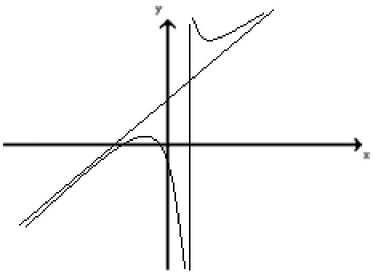
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 1$. Prava $y = x + 10$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2-4x-23}{(x-2)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-\infty, 2-3\sqrt{3}\right) \cup \left(2+3\sqrt{3}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(2-3\sqrt{3}, 2\right) \cup \left(2, 2+3\sqrt{3}\right)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(2-3\sqrt{3}, 12-6\sqrt{3}\right)$, a minimum u tački $\left(2+3\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}\right)$.

7) $y'' = \frac{46}{(x-2)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (2, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 2)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



149. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-1} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-1} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = -2$. Presek sa y-osom je $y = -4$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -2) \cup (-2,1)$, a pozitivna za $x \in (1, +\infty)$.

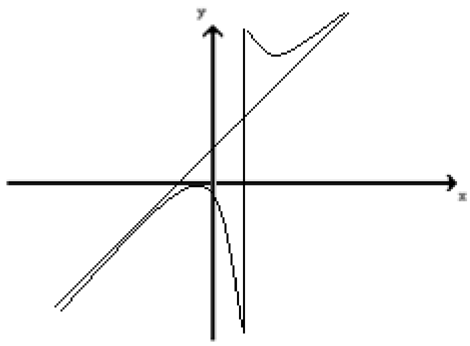
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 1$. Prava $y = x + 5$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-2,1) \cup (1,4)$. Funkcija ima minimum u tački $(4,12)$, a maksimum u tački $(-2,0)$.

7) $y'' = \frac{18}{(x-1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (1, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



150. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8x+7}{x-1} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8x+7}{x-1} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = -7$. Presek sa y-osom je $y = -7$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -7) \cup (-1,1)$, a pozitivna za $x \in (-7, -1) \cup (1, +\infty)$.

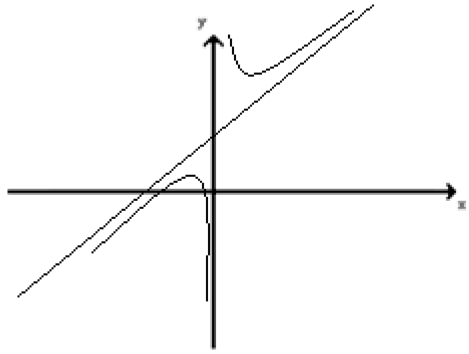
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 1$. Prava $y = x + 9$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-3,1) \cup (1,5)$. Funkcija ima minimum u tački $(5,18)$, a maksimum u tački $(-3,2)$.

7) $y'' = \frac{32}{(x-1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (1, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 1)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



151. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x-5}{x-7} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x-5}{x-7} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$. Presek sa y-osom je $y = \frac{5}{7}$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -1) \cup (5,7)$, a pozitivna za $x \in (-1,5) \cup (7, +\infty)$.

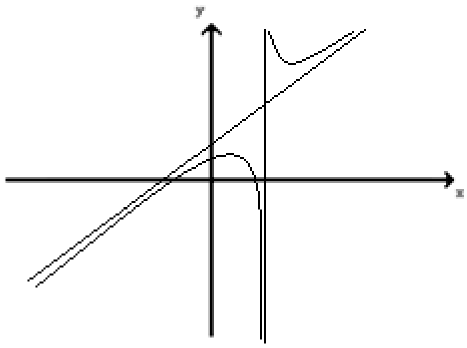
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 7$. Prava $y = x + 3$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2-14x+33}{(x-7)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 3) \cup (11, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (3,7) \cup (7,11)$. Funkcija ima minimum u tački $(11,18)$, a maksimum u tački $(3,2)$.

7) $y'' = \frac{32}{(x-7)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (7, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 7)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



152. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-9x+4}{x-7} = -\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-9x+4}{x-7} = +\infty$

2) Nule funkcije su $x_1 = \frac{9-\sqrt{65}}{2}$ i $x_2 = \frac{9+\sqrt{65}}{2}$. Presek sa y-osom je $y = -\frac{4}{7}$.

3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-\infty, \frac{9-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(7, \frac{9+\sqrt{65}}{2}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(\frac{9-\sqrt{65}}{2}, 7\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{65}}{2}, +\infty\right)$.

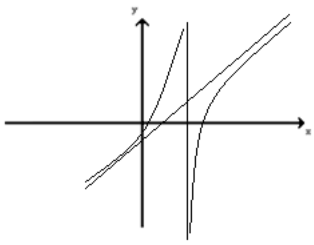
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 7$. Prava $y = x - 2$ je kosa asimptota.

6) $y' = \frac{x^2-14x+59}{(x-7)^2}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema.

7) $y'' = \frac{-20}{(x-7)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in (7, +\infty)$, a konveksna za $x \in (-\infty, 7)$. Nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



153. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(x-1)}{x^2+1} = 1 \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{x^2+1} = 1$$

2) Nule funkcije su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Presek sa y-osom je $y = 0$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, a negativna za $x \in (0,1)$.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

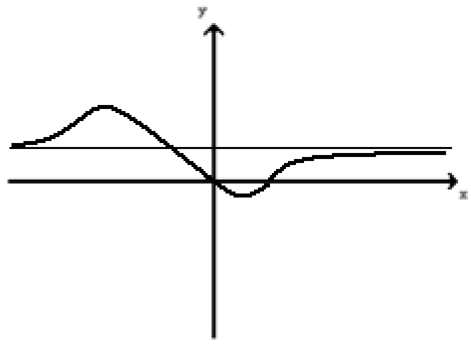
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 1$. Nema vertikalne asimptote. Nema kose asimptote.

6) $y' = \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right)$.

Funkcija ima minimum u tački $\left(-1+\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$, a maksimum u tački $\left(-1-\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

7) $y'' = \frac{2(1-x)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty, -2-\sqrt{3}\right) \cup \left(-2+\sqrt{3}, 1\right)$, a konkavna za $x \in \left(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\right) \cup (1, +\infty)$. Prevojne tačkesu $P_1\left(-2-\sqrt{3}, -\frac{3+5\sqrt{3}}{6}\right)$, $P_2\left(-2+\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}-3}{6}\right)$ i $P_3(1,0)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



154. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, \infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} = 1 \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} = 1$

2) Nula funkcije je $x = 1$. Presek sa y-osom je $y = 1$.

3) $y \geq 0$ na celom domenu.

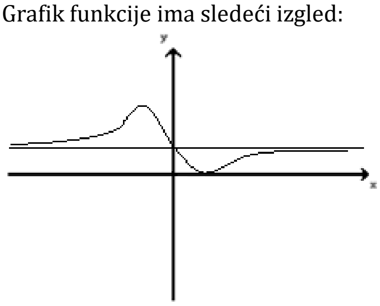
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Horizontalna asimptota je prava $y = 1$. Nema vertikalne asimptote. Nema kose asimptote.

6) $y' = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-1,1)$. Funkcija ima minimum u tački $(1,0)$, a maksimum u tački $(-1,2)$.

7) $y'' = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ i $P_3(0,1)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



155. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+x+4}{(x-2)^2} = -2 \quad \lim_{x\to2^-} \frac{-2x^2+x+4}{(x-2)^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+x+4}{(x-2)^2} = -2 \quad \lim_{x\to2^+} \frac{-2x^2+x+4}{(x-2)^2} = -\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ i $x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$. Presek sa y −osom je $y = 1$.

3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}, 2\right) \cup (2, +\infty)$, a pozitivna za $x \in \left(\frac{1-\sqrt{33}}{4}, \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)$.

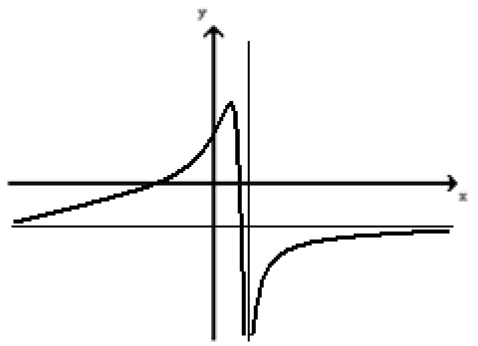
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Horizontalna asimptota je prava $y = -2$. Vertikalna asimptota je prava $x = 2$.

6) $y' = \frac{7x-10}{(x-2)^3}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(\frac{10}{7}, 2\right)$, a rastuća za $x \in \left(-\infty, \frac{10}{7}\right) \cup (2, +\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(\frac{10}{7}, \frac{33}{8}\right)$.

7) $y'' = \frac{2(8-7x)}{(x-2)^4}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(\frac{8}{7}, 2\right) \cup (2, \infty)$, a konveksna za $x \in \left(-\infty, \frac{8}{7}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(\frac{8}{7}, \frac{31}{9}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



156. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 \ \lim_{x\to0^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 \ \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Nema preseka sa y −osom jer $x = 0 \notin D$.

3) Funkcija je negativna za $x \in (1,2)$, a pozitivna za $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (2, +\infty)$.

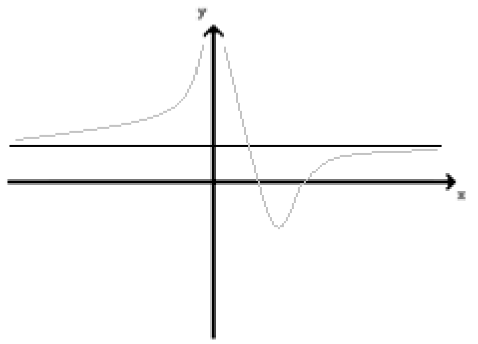
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Horizontalna asimptota je prava $y = 1$. Vertikalna asimptota je prava $x = 0$.

6) $y' = \frac{3x-4}{x^3}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$, a rastuća za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right)$.

7) $y'' = \frac{6(2-x)}{x^4}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-\infty, 2)$, a konkavna za $x \in (2, +\infty)$. Prevojna tačka je $P(2,0)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



157. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = -\infty \ \lim_{x\to2^-} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = +\infty \ \lim_{x\to2^+} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0)$.

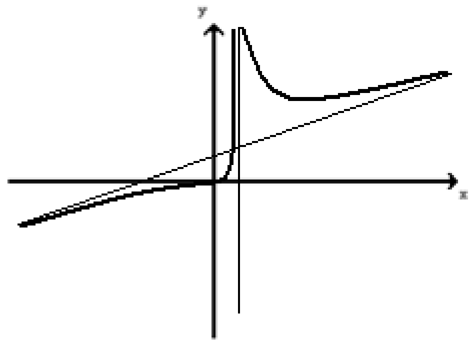
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 2$. Kosa asimptota je prava $y = \frac{1}{4}x + 1$.

6) $y' = \frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (2,6)$, a rastuća za $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(6, \frac{27}{8}\right)$.

7) $y'' = \frac{6x}{(2-x)^4}$ => funkcija je koveksna za $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



158. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{(x-4)^2} = 0 \ \lim_{x\to4^-} \frac{x-2}{(x-4)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{(x-4)^2} = 0 \ \lim_{x\to4^+} \frac{x-2}{(x-4)^2} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 2$. Presek sa y −osom je $y = -\frac{1}{8}$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (2,4) \cup (4, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, 2)$.

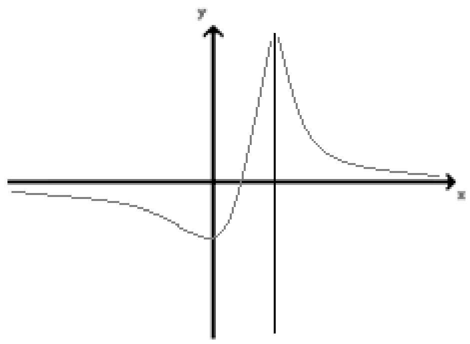
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Horizontalna asimptota je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota je prava $x = 4$.

6) $y' = \frac{-x}{(x-4)^3}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, a rastuća za $x \in (0,4)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$.

7) $y'' = \frac{2(x+2)}{(x-4)^4}$ => funkcija je koveksna za $x \in (-2,4) \cup (4, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -2)$. Prevojna tačka je $P\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



159. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty \ \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty \ \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0, \infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,0)$.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

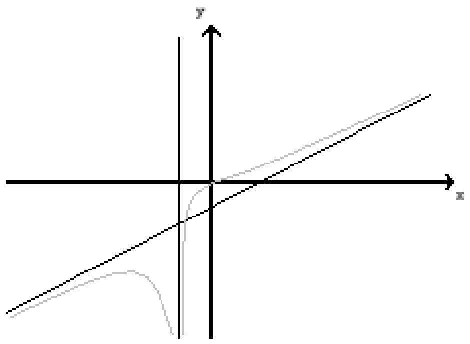
5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = -1$.Kosa asimptota je prava $y = \frac{1}{2}x - 1$.

6) $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-3, -1)$, a rastuća za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$. Funkcija ima maksimum u

tački $\left(-3,-\frac{27}{8}\right)$.

7) $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$ => funkcija je koveksna za $x \in (0,\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



160. 1) $D = (-\infty,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2+1} = -\infty \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2+1} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0,+\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty,0)$.

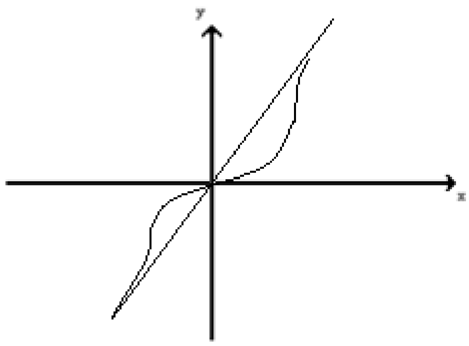
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.

5) Kosa asimptota je prava $y = 2x$.

6) $y' = \frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema.

7) $y'' = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\sqrt{3},0\right) \cup \left(\sqrt{3},+\infty\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2(0,0)$ i $P_3\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



161. 1) $D = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-8}{x^4} = -\infty \lim_{x\to0^-}\frac{x^5-8}{x^4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-8}{x^4} = +\infty \lim_{x\to0^+}\frac{x^5-8}{x^4} = -\infty$$

2) Nula funkcije je $x = \sqrt[5]{8}$. Nema preseka sa y −osom.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(\sqrt[5]{8},+\infty\right)$, a negativna za $x \in \left(-\infty,\sqrt[5]{8}\right)$.

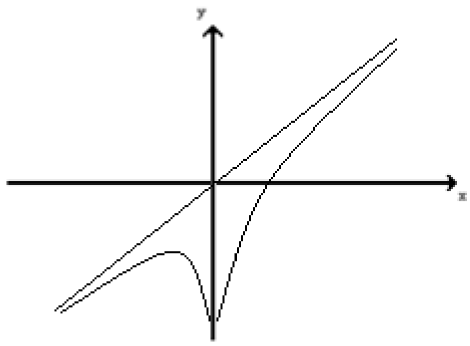
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Vertikalna asimptota je prava $x = 0$. Kosa asimptota je prava $y = x$.

6) $y' = \frac{x^5+32}{x^5}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-2,0)$, a rastuća za $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$.

7) $y'' = \frac{-160}{x^6} < 0$ => funkcija je konkavna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



162. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty \quad \lim_{x\to0^-}\left(3x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(3x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty \quad \lim_{x\to0^+}\left(3x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}$ i $x_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}$. Nema preseka sa y-osom.

3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}, +\infty\right)$.

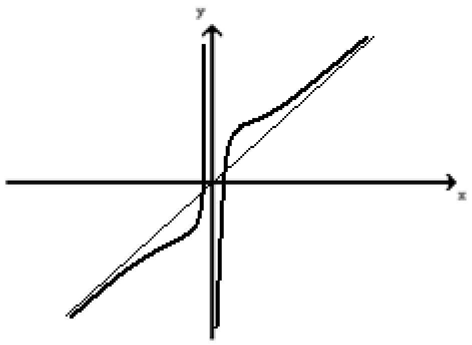
4) Funkcija je neparna.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 0$. Kosa asimptota je prava $y = 3x$.

6) $y' = \frac{3(x^2-1)^2}{x^4} \geq 0$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

7) $y'' = \frac{12(x^2-1)}{x^5}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$. Prevojne tačke su $P_1(-1,-8)$ i $P_2(1,8)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



163. Analizom funkcije dobijamo:

1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{x^2}{4}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to0^-}\left(\frac{2}{x}-\frac{x^2}{4}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{x^2}{4}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x}-\frac{x^2}{4}\right)=+\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 2$. Nema preseka sa y-osom.

3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, a pozitivna za $x \in (0,2)$.

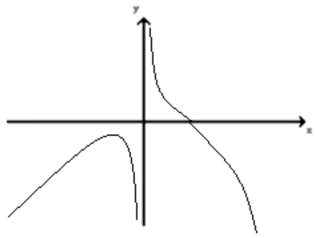
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Finkcija nije periodična.

5) Nema horizontalne asimptote. Vertikalna asimptota je prava $x = 0$. Nema kose asimptote.

6) $y' = \frac{-4-x^3}{2x^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{4}\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-\sqrt[3]{4}, 0\right) \cup (0, +\infty)$. Lokalni maksimum je $\left(-\sqrt[3]{4}, \frac{-3}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

7) $y'' = \frac{8-x^3}{2x^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (0,2)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Prevojna tačka je $P(2,0)$.

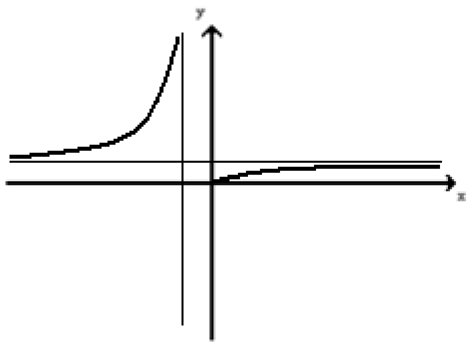
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



164. 1) $D = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x+2}} = 1 \quad \lim_{x\to-2^-}\sqrt{\frac{x}{x+2}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x+2}} = 1 \quad f(0) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y –osom je $y = 0$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 1$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = -2$.
6) $y' = \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{\frac{x}{x+2}}}$ => funkcija je rastuća na celom domenu.
7) $y'' = \frac{-1-2x}{(x+2)^3 x\sqrt{\frac{x}{x+2}}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-\infty, -2)$, a konkavna za $x \in [0, +\infty)$. Nema prevojnih tačaka.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

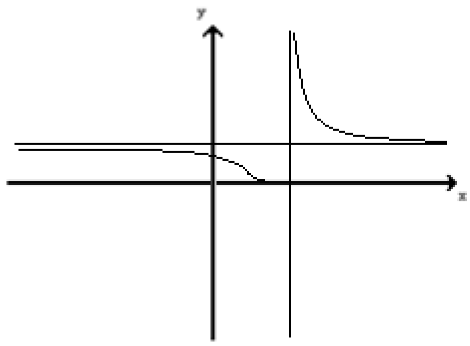


165. 1) $D = (-\infty, 2] \cup (4, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2-x}{4-x}} = 1 \quad \lim_{x\to4^+}\sqrt{\frac{2-x}{4-x}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2-x}{4-x}} = 1 \quad f(2) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 2$. Presek sa y –osom je $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 1$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 4$.
6) $y' = \frac{-1}{(4-x)^2\sqrt{\frac{2-x}{4-x}}} < 0$ => funkcija je opadajuća na celom domenu.
7) $y'' = \frac{2x-3}{(4-x)^3(2-x)\sqrt{\frac{2-x}{4-x}}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (\frac{3}{2}, 2]$, a konkavna za $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (4, +\infty)$. Prevojna tačka je $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

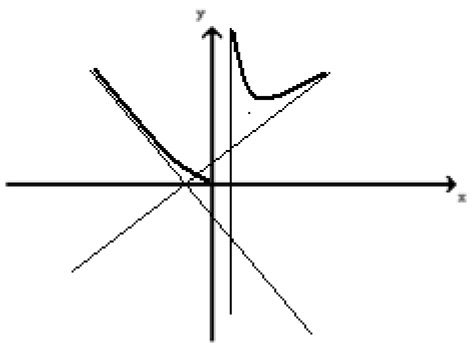


166. 1) $D = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty \lim_{x\to2^+}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty f(0) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 2$. Kosa asimptota zdesna je prava $y = x + 1$, a sa leva $y = -x - 1$.
6) $y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, 0] \cup (2,3)$, a rastuća za $x \in (3, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(3,3\sqrt{3})$.
7) $y'' = \frac{3x}{(x-2)^3\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



167. 1) $D = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

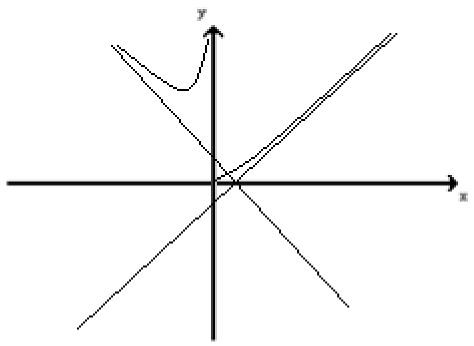
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = +\infty \lim_{x\to-3^-}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = +\infty f(0) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = -3$. Kosa asimptota zdesna je prava $y = x - \frac{3}{2}$, a sa leva $y = -x + \frac{3}{2}$.
6) $y' = \frac{x^2(2x+9)}{2(x+3)^2\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$, a rastuća za $x \in \left(-\frac{9}{2}, -3\right) \cup (0, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\sqrt{3})$.

7) $y'' = \frac{27x}{4(x+3)^3\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

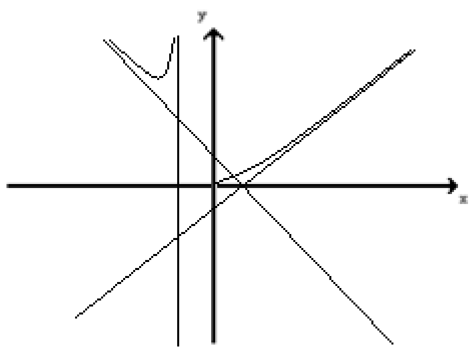


168. 1) $D = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+2}} = +\infty \lim_{x\to-2^-}\sqrt{\frac{x^3}{x+2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+2}} = +\infty f(0) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = -2$. Kosa asimptota zdesna je prava $y = x - 1$, a sa leva $y = -x + 1$.
6) $y' = \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -3)$, a rastuća za $x \in (-3, -2) \cup (0, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(-3, 3\sqrt{3})$.
7) $y'' = \frac{x(2x^2+12x+21)}{(x+2)^3\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}}$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



169. 1) $D = (-\infty, 0] \cup (6, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-6}} = +\infty \lim_{x\to6^+}\sqrt{\frac{x^3}{x-6}} = +\infty$$

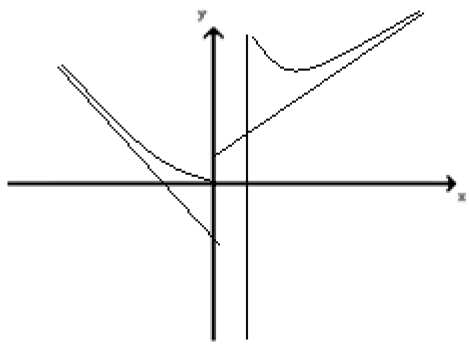
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-6}} = +\infty f(0) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 6$. Kosa asimptota zdesna je prava $y = x + 3$, a sa leva $y = -x - 3$.

6) $y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-6)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, 0] \cup (6,9)$, a rastuća za $x \in (9, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(9, 9\sqrt{3})$.

7) $y'' = \frac{27x}{(x-6)^3\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}}$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



170. 1) $D = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} = -\infty \lim_{x\to1^+} x\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} = +\infty f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

2) Nula funkcije su $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$. Presek sa y −osom je $y = 0$.

3) Funcija je pozitivna za $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0)$.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

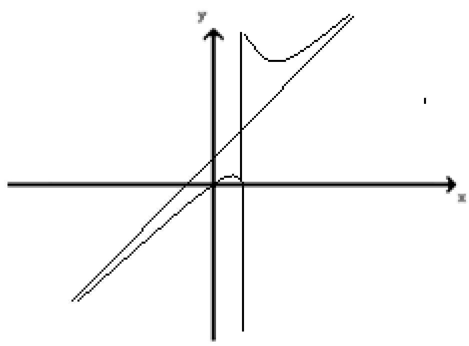
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 1$. Kosa asimptota je prava $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

6) $y' = \frac{4x^2-7x+2}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(\frac{7-\sqrt{17}}{8}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}\right)$, a rastuća za $x \in \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{17}}{8}, +\infty\right)$.

Funkcija ima maksimum u tačk$\left(\frac{7-\sqrt{17}}{8}, f\left(\frac{7-\sqrt{17}}{8}\right)\right)$, a minimum u tački $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{8}, f\left(\frac{7+\sqrt{17}}{8}\right)\right)$.

7) $y'' = \frac{7x-4}{4(2x-1)(x-1)^3\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (1, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$. Nema prevojnih tačaka.

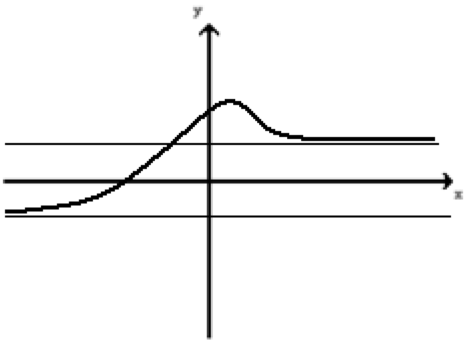
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



171. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = -1 \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = 1$$

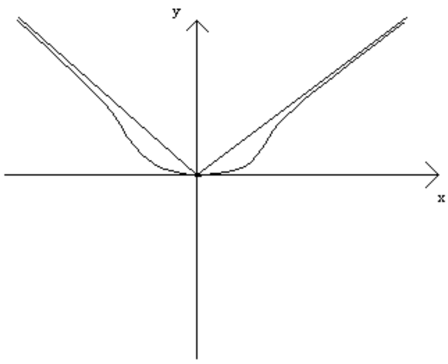
2) Nula funkcije je $x = -2$. Presek sa y −osom je $y = \sqrt{2}$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -2)$, a pozitivna za $x \in (-2, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = 1$, a sa leva prava $y = -1$.
6) $y' = \frac{2(1-x)}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1,)$, a opadajuća za $x \in (-1, +\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $(1, \sqrt{3})$.
7) $y'' = \frac{2(2x^2-3x-2)}{\sqrt{(x^2+2)^5}}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ i $P_2\left(2, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



172. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = +\infty \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija je parna. Funkcija nije periodična.
5) Kosa asimptota zdesna je prava $y = x$, a sa leva prava $y = -x$.
6) $y' = \frac{x(2+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (0, \infty)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$. Funkcija ima minimum u tački (0,0).
7) $y'' = \frac{2-x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ =>funkcija je koveksna za $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, a konkavna za$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ i $P_2\left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

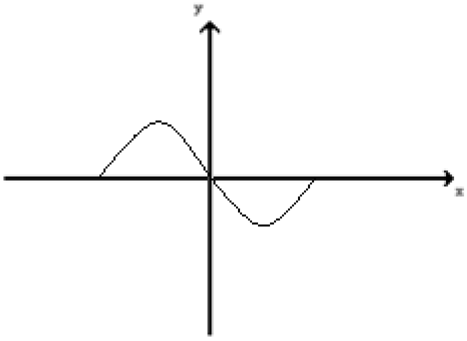


173. 1) $D = [-1,1]$.

$$f(-1) = 0, f(1) = 0$$

2) Nule funkcije su $x_1 = 0, x_2 = -1$ i $x_3 = 1$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (-1,0)$, a negativna za $x \in (0,1)$.
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.

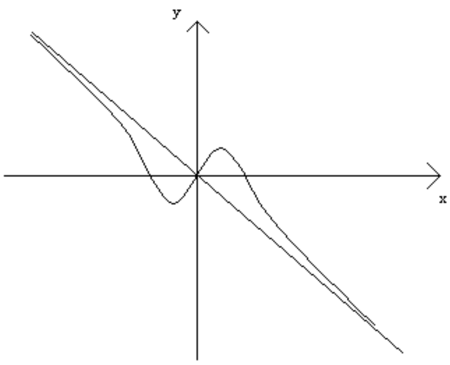
5) Funkcija nema asimptota.
6) $y' = \frac{8x^2-4}{\sqrt{1-x^2}}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right)$, a maksimum u tački $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$.
7) $y'' = \frac{-4x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}} > 0$ =>funkcija je konveksna za $(0,1)$, a konkavna za $(-1,0)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



174. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{3x - x^3} = +\infty \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{3x - x^3} = -\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$ i $x_3 = -\sqrt{3}$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, a pozitivna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.
5) Kosa asimptota je prava $y = -x$.
6) $y' = \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, a rastuća za $x \in (-1,1)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(-1, -\sqrt[3]{2}\right)$, a maksimum u tački $\left(1, \sqrt[3]{2}\right)$.
7) $y'' = \frac{-2(x^2+1)}{\sqrt[3]{(3x-x^3)^5}}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, a konkavna za$x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{3}, 0\right), P_2(0,0)$ i $P_3\left(\sqrt{3}, 0\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

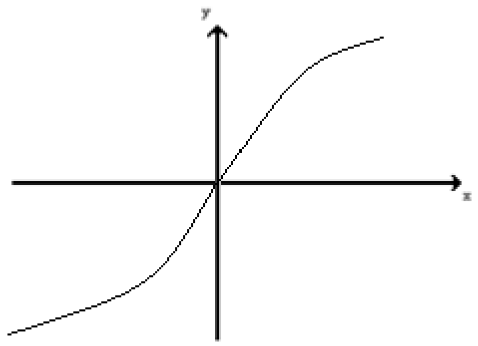


175. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x} + 2x\right) = -\infty \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x} + 2x\right) = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, 0)$, a pozitivna za $x \in (0, +\infty)$.
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.
5) Funkcija nema asimptota.
6) $y' = \frac{1+6\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema.
7) $y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^2}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-\infty, 0)$, a konkavna za $x \in (0, +\infty)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.

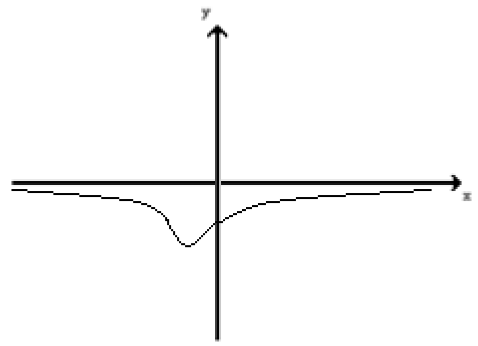
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



176. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}\right)=0 \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}\right)=0$$

2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y = -1$.
3) Funkcija je negativna na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) $y = 0$ je horizontalna asimptota.
6) $y' = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Funkcija ima mínimum u tački $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt[3]{4}\right)$.
7) $y'' = \frac{-2\sqrt[3]{(x+1)^5}+2\sqrt[3]{x^5}}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}\sqrt[3]{x^5}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-1,0)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Prevojne tačke su $P_1(-1,-1)$ i $P_2(0,-1)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

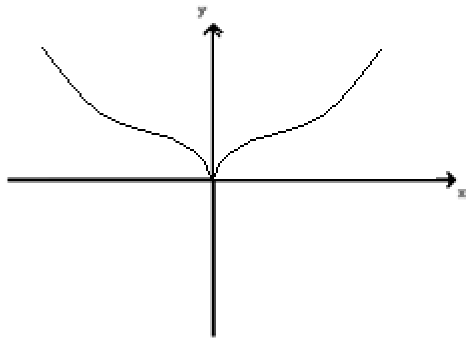


177. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^4+x^2}\right)=+\infty \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^4+x^2}\right)=+\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je nenegativna na celom domenu.
4) Funkcija je parna. Funkcija nije periodična.
5) Funkcija nema asimptota.
6) $y' = \frac{2x(2x^2+1)}{3\sqrt[3]{(x^4+x^2)^2}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (0, \infty)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$. Funkcija ima minimum u tački $(0,0)$.
7) $y'' = \frac{2x^2(2x^4+5x^2-1)}{9\sqrt[3]{(x^4+x^2)^5}}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{4}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{4}}, +\infty\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{4}}, \sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{4}}\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{4}}, \sqrt[3]{\frac{19-3\sqrt{33}}{8}}\right)$ i $P_2\left(\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{4}}, \sqrt[3]{\frac{19-3\sqrt{33}}{8}}\right)$.

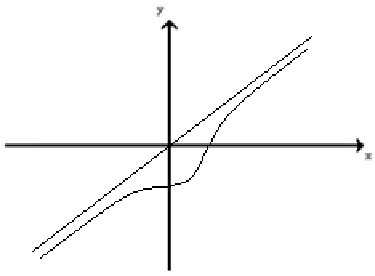
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



178. 1) $D = (-\infty, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2} = +\infty$$

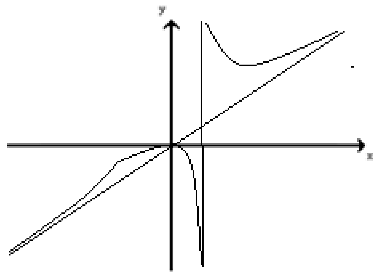
2) Nula funkcije je $x = \sqrt[3]{2}$. Presek sa y −osom je $y = -\sqrt[3]{2}$.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Kosa asimptota je prava $y = x$.
6) $y' = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema
7) $y'' = \frac{-4x}{\sqrt[3]{(x^3-2)^5}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$, a konveksna za $x \in \left(0, \sqrt[3]{2}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



179. 1) $D = \left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 2}} = -\infty \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 2}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 2}} = -\infty \lim_{x\to\sqrt[3]{2}^+} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 2}} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \sqrt[3]{2}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota je prava $x = \sqrt[3]{2}$. Kosa asimptota je prava $y = x$.
6) $y' = \frac{x(x^3-4)}{\sqrt[3]{(x^3-2)^4}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{4}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(0, \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$. Funkcija ima maksimum u tački $(0,0)$, a minimum u tački $\left(\sqrt[3]{4}, 2\right)$
7) $y'' = \frac{4(x^3+2)}{\sqrt[3]{(x^3-2)^7}}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$. Prevojna tačka je $P_1\left(-\sqrt[3]{2}, -1\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



180. 1) $D = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x - 4 - \sqrt{3x^2 + 6x - 24}\right) = -\infty \lim_{x\to\infty}\left(2x - 4 - \sqrt{3x^2 + 6x - 24}\right) = +\infty$$

$f(-4) = -12, f(2) = 0$.

2) Nule funkcije su $x_1 = 2$ i $x_2 = 20$. Nema preseka sa y-osom.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (20, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, -4] \cup (2,20)$.

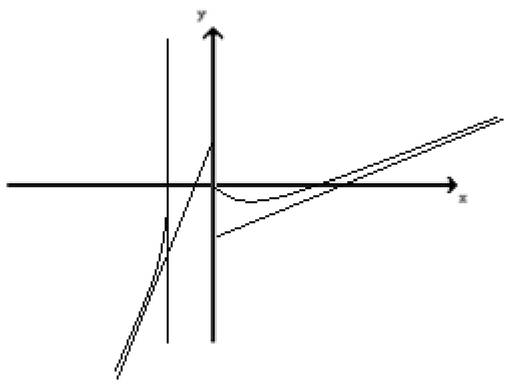
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Prava $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x — 4 - \sqrt{3}$ je kosa asimptota sa zdesna, a prava $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x — 4 + \sqrt{3}$ je kosa asimptota sa leva.

6) $y' = \frac{2\sqrt{3x^2+6x-24}-3x-3}{\sqrt{3x^2+6x-24}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -4] \cup (5, +\infty)$, a opadajuća za $x \in [2,5)$. Funkcija ima minimum u tački $(5, -3)$.

7) $y'' = \frac{81}{\sqrt{(3x^2+6x-24)^3}} > 0$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



181. 1) $D = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + 1 - \sqrt{x^2 - x}\right) = -\infty \lim_{x\to\infty}\left(x + 1 - \sqrt{x^2 - x}\right) = \frac{3}{2}$$

$f(0) = 1, f(1) = 2$.

2) Nula funkcije je $x = -\frac{1}{3}$. Presek sa y –osom je $y = 1$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right] \cup [1, +\infty)$, a negativna za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.

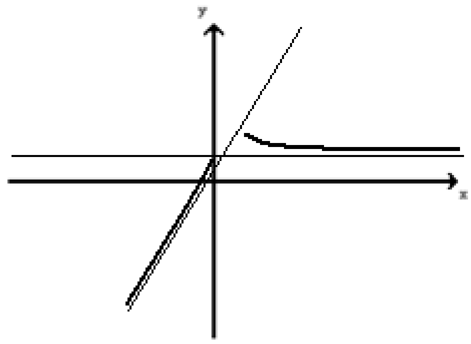
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Prava $y = \frac{3}{2}$ je horizontalna asimptota zdesna. Prava $y = 2x + \frac{1}{2}$ je kosa asimptota sa leva.

6) $y' = \frac{2\sqrt{x^2-x}-2x+1}{2\sqrt{x^2-x}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 0]$, a opadajuća za $x \in [1, +\infty)$. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

7) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{(x^2-x)^3}} > 0$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



182. 1) $D = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x - \sqrt{3x^2+2x}\right) = -\infty \lim_{x\to\infty}\left(2x - \sqrt{3x^2+2x}\right) = +\infty$$

$f(-\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}, f(0) = 0$.

2) Nule funkcije su $x = 0$ i $x = 2$. Presek sa y −osom je $y = 0$.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (2, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup (0,2)$.

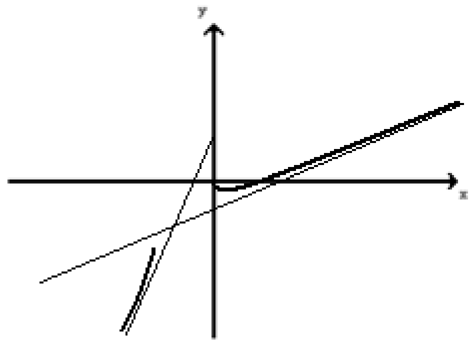
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Prava $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ je kosa asimptota zdesna. Prava $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ je kosa asimptota sa leva.

6) $y' = \frac{2\sqrt{3x^2+2x}-3x-1}{\sqrt{3x^2+2x}}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

7) $y'' = \frac{1}{\sqrt{(3x^2+2x)^3}} > 0$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



183. 1) $D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2x - \sqrt{3x^2+6x}\right) = +\infty \lim_{x\to\infty}\left(-2x - \sqrt{3x^2+6x}\right) = -\infty$$

$f(-2) = 4, f(0) = 0$.

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.

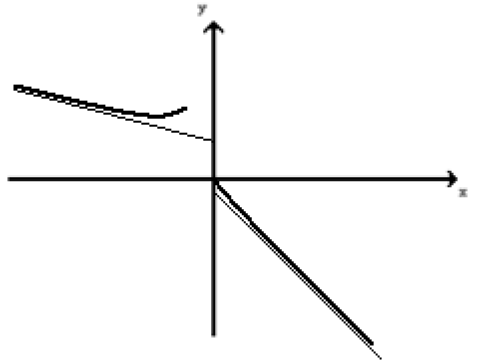
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (-\infty, -2]$, a negativna za $x \in (0, +\infty)$.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Prava $y = \left(-2 - \sqrt{3}\right)x - \sqrt{3}$ je kosa asimptota zdesna, a prava $y = \left(-2 + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{3}$ je kosa asimptota sa leva.

6) $y' = \frac{-2\sqrt{3x^2+6x}-3x-3}{\sqrt{3x^2+6x}}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$, a rastuća za $x \in (-3, -2]$. Funkcija ima mínimum u tački $(-3,3)$.

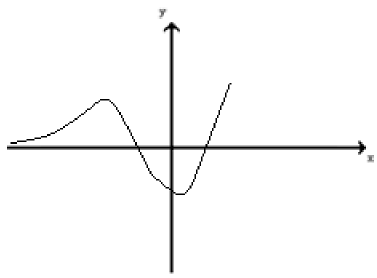
7) $y'' = \frac{9}{\sqrt{(3x^2+6x)^3}} > 0$ => funkcija je konveksna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.



184. 1) $D(-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x^2-8)e^x\right) = 0 \lim_{x\to\infty}\left((x^2-8)e^x\right) = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = 2\sqrt{2}$ i $x_2 = -2\sqrt{2}$. Presek sa y −osom je $y = -8$.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y = 0$.
6) $y' = e^x(x^2+2x-8)$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-4,2)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(-4, \frac{8}{e^4}\right)$, a minimum u tački $(2, -4e^2)$.
7) $y'' = e^x(x^2+4x-6)$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty, -2-\sqrt{10}\right) \cup \left(-2+\sqrt{10}, +\infty\right)$, a konkavna za $x \in \left(-2-\sqrt{10}, -2+\sqrt{10}\right)$. Prevojne tačke su $P_1(-2-\sqrt{10}, \left(6+4\sqrt{10}\right)e^{-2-\sqrt{10}})$ i $P_2(-2+\sqrt{10}, \left(6-4\sqrt{10}\right)e^{-2+\sqrt{10}})$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

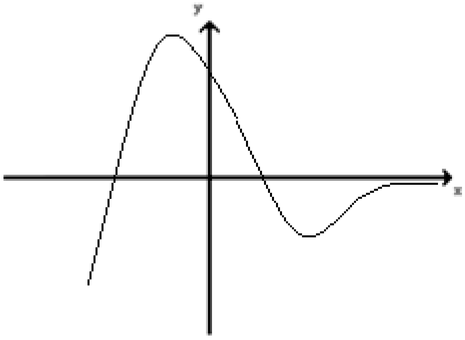


185. 1) $D(-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left((3-x^2)e^{-x}\right) = -\infty \lim_{x\to\infty}\left((3-x^2)e^{-x}\right) = 0$$

2) Nule funkcije su $x_1 = \sqrt{3}$ i $x_2 = -\sqrt{3}$. Presek sa y −osom je $y = 3$.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, a negativna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota sa desna je prava $y = 0$.
6) $y' = e^{-x}(x^2-2x-3)$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-1,3)$. Funkcija ima maksimum u tački $(-1, 2e)$, a minimum u tački $\left(3, \frac{-6}{e^3}\right)$.
7) $y'' = e^{-x}(-x^2+4x+1)$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2+\sqrt{5}, +\infty\right)$, a konveksna za $x \in \left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right)$. Prevojne tačke su $P_1(2-\sqrt{5}, \left(4\sqrt{5}-6\right)e^{\sqrt{5}-2})$ i $P_2(2+\sqrt{5}, \left(-4\sqrt{5}-6\right)e^{-2-\sqrt{5}})$.

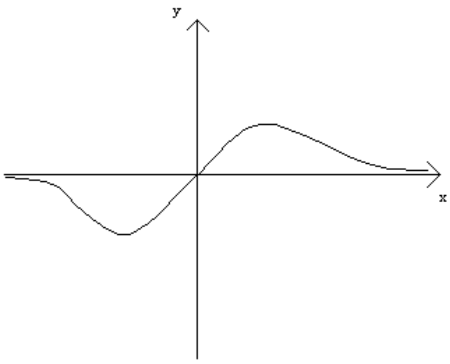
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



186. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{-x^2}\right) = 0 \lim_{x\to\infty}\left(xe^{-x^2}\right) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y –osom je $y = 0$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, 0)$, a pozitivna za $x \in (0, \infty)$.
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 0$.
6) $y' = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a opadajuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$, a minimum u tački $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$.
7) $y'' = -2xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e^3}}\right)$, $P_2(0,0)$ i $P_3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e^3}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

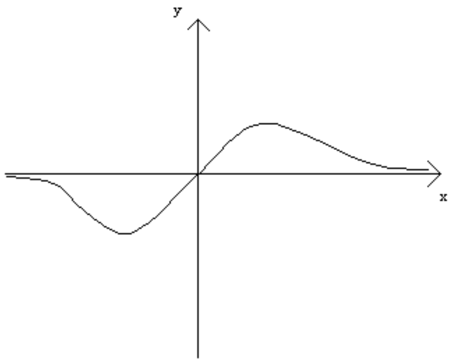


187. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y –osom je $y = 0$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, 0)$, a pozitivna za $x \in (0, +\infty)$.
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 0$.
6) $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$ => funkcija je rastuća za $x \in (-1,1)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, a minimum u tački $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
7) $y'' = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}\right)$, $P_2(0,0)$ i $P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

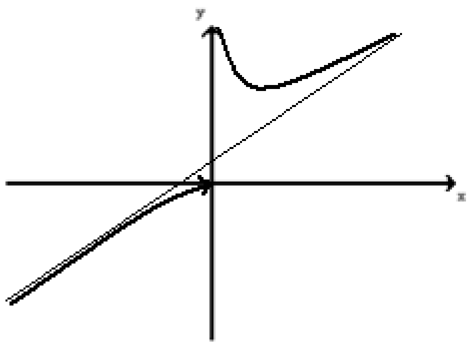


188. 1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty \ \lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \ \lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa $y -$ osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0, \infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$. Kosa asimptota je prava $y = x + 1$.
6) $y' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (0,1)$. Funkcija ima minimum u tački $(1, e)$.
7) $y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (0, \infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



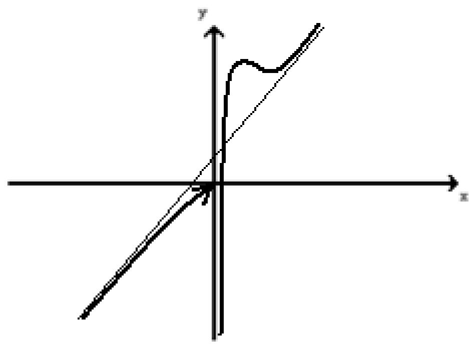
189. 1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} (3x-1)e^{\frac{2}{x}} = -\infty \lim_{x\to\infty} (3x-1)e^{\frac{2}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} (3x-1)e^{\frac{2}{x}} = 0 \ \lim_{x\to0^+} (3x-1)e^{\frac{2}{x}} = -\infty$$

2) Nula funkcije je $x = \frac{1}{3}$. Nema preseka sa y –osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$. Kosa asimptota je prava $y = 3x + 5$.
6) $y' = \frac{e^{\frac{2}{x}}(3x^2-6x+2)}{x^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -0) \cup \left(0,1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
Funkcija ima minimum u tački $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, (2 + \sqrt{3})e^{3-\sqrt{3}}\right)$, a maksimum u tački $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, (2 - \sqrt{3})e^{3+\sqrt{3}}\right)$.
7) $y'' = \frac{4e^{\frac{2}{x}}(2x-1)}{x^4}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^4\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

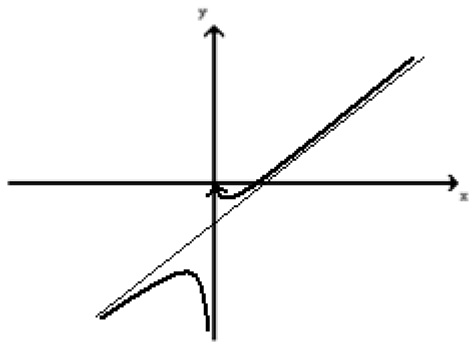


190. 1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x-2)e^{-\frac{1}{x}}\right) = -\infty \lim_{x\to\infty}\left((x-2)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\left((x-2)e^{-\frac{1}{x}}\right) = -\infty \lim_{x\to0^+}\left((x-2)e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 2$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (2, \infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0) \cup (0,2)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 0$. Kosa asimptota je prava $y = x - 3$.
6) $y' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x-2)}{x^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, a opadajuća za $x \in (-2,0) \cup (0,1)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(-2, -4\sqrt{e}\right)$, a minimum u tački $\left(1, \frac{-1}{e}\right)$.
7) $y'' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(5x-2)}{x^4}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{5}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(\frac{2}{5}, \frac{-8}{5\sqrt{e^5}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



191. 1) $D = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

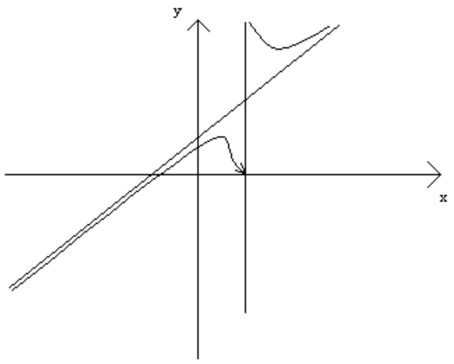
$$\lim_{x\to-\infty}\left((x+3)e^{\frac{1}{x-3}}\right) = -\infty \lim_{x\to\infty}\left((x+3)e^{\frac{1}{x-3}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}\left((x+3)e^{\frac{1}{x-3}}\right) = 0 \lim_{x\to3^+}\left((x+3)e^{\frac{1}{x-3}}\right) = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = -3$. Presek sa y −osom je $y = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (-3,3) \cup (3, \infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, -3)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 3$. Kosa asimptota je prava $y = x + 4$.
6) $y' = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}(x^2-7x+6)}{(x-3)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 1) \cup (6, \infty)$, a opadajuća za $x \in (1,3) \cup (3,6)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(6, 9\sqrt[3]{e}\right)$, a maksimum u tački $\left(1, \frac{4}{\sqrt{e}}\right)$.
7) $y'' = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}(13x-33)}{(x-3)^4}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(\frac{33}{13}, 3\right) \cup (3, \infty)$, a konkavna za $x \in \left(-\infty, \frac{33}{13}\right)$. Prevojna tačka je

$P\left(\frac{33}{13}, \frac{72}{13\sqrt[6]{e^{13}}}\right)$.

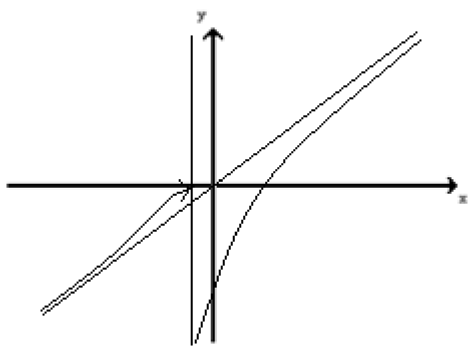
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



192. 1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = -\infty \lim_{x\to\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-}(x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = 0 \lim_{x\to-1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = -\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 1$. Presek sa y −osom je $y = -e$.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (1, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,1)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = -1$. Kosa asimptota je prava $y = x$.
6) $y' = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}(x^2+x+2)}{(x+1)^2}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema.
7) $y'' = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}(-3x-5)}{(x+1)^4}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$, a konkavna za $x \in \left(-\frac{5}{3}, -1\right) \cup (-1, +\infty)$. Prevojna tačka je $P\left(-\frac{5}{3}, \frac{-8}{3\sqrt{e^3}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

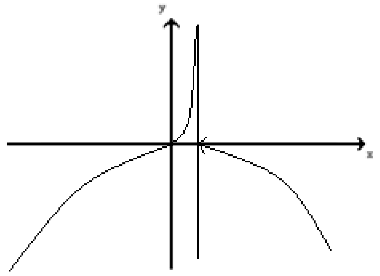


193. 1) $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-x^2)e^{\frac{-1}{x-1}} = -\infty \lim_{x\to\infty}(x-x^2)e^{\frac{-1}{x-1}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}(x-x^2)e^{\frac{-1}{x-1}} = +\infty \lim_{x\to1^+}(x-x^2)e^{\frac{-1}{x-1}} = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 0$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0,1)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 1$.
6) $y' = \frac{e^{\frac{-1}{x-1}}(-2x^2+2x-1)}{x-1}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 1)$, a opadajuća za $x \in (1, +\infty)$. Funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
7) $y'' = \frac{xe^{\frac{-1}{x-1}}(-2x^2+4x-3)}{(x-1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (0,1)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.

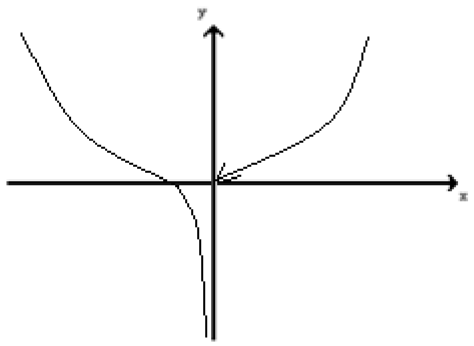
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



194. 1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x)e^{\frac{-1}{x}} = +\infty \lim_{x\to\infty}(x^2+x)e^{\frac{-1}{x}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)e^{\frac{-1}{x}} = -\infty \lim_{x\to 0^+}(x^2+x)e^{\frac{-1}{x}} = 0$$

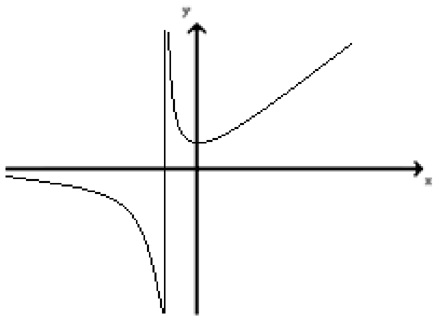
2) Nula funkcije je $x = -1$. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (-1,0)$, a pozitivna za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 0$.
6) $y' = \frac{e^{\frac{-1}{x}}(2x^2+2x+1)}{x}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$, a rastuća za $x \in (0, +\infty)$. Funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
7) $y'' = \frac{e^{\frac{-1}{x}}(2x^2+1)(x+1)}{x^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in (-1,0)$, a konveksna za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Prevojna tačka je $P(-1,0)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



195. 1) $D = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{2x+1} = 0 \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x+1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{e^{2x}}{2x+1} = -\infty \lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{e^{2x}}{2x+1} = +\infty$$

2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y = 1$.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota je prava $x = -\frac{1}{2}$.
6) $y' = \frac{4xe^{2x}}{(2x+1)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (0, +\infty)$, a opadajuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Funkcija ima minimum u tački (0,1).
7) $y'' = \frac{4e^{2x}(4x^2+1)}{(2x+1)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



196. 1) $D=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}}{1+3x}=0\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{1+3x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-}\frac{e^{3x}}{1+3x}=-\infty\quad \lim_{x\to-\frac{1}{3}^+}\frac{e^{3x}}{1+3x}=+\infty$$

2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y=1$.

3) Funkcija je negativna za $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$, a pozitivna za $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

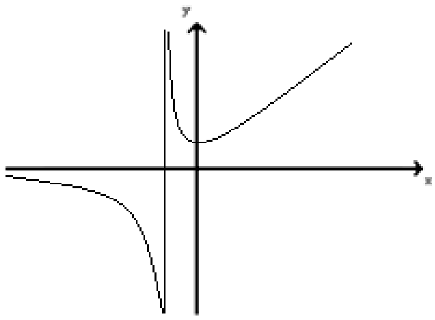
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y=0$. Vertikalna asimptota je prava $x=-\frac{1}{3}$.

6) $y'=\frac{9xe^{3x}}{(1+3x)^2}$ => funkcija je rastuća za $x\in(0,+\infty)$, a opadajuća za $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},0\right)$. Funkcija ima minimum u tački (0,1).

7) $y''=\frac{9e^{3x}(9x^2+1)}{(1+3x)^3}$ => funkcija je konkavna za $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$, a konveksna za $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



197. 1) $D=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x^2-3}\right)=0\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2-3}\right)=+\infty\quad \lim_{x\to\sqrt{3}^-}\left(\frac{e^x}{x^2-3}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-}\left(\frac{e^x}{x^2-3}\right)=+\infty\quad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+}\left(\frac{e^x}{x^2-3}\right)=-\infty\quad \lim_{x\to\sqrt{3}^+}\left(\frac{e^x}{x^2-3}\right)=+\infty$$

2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y=-\frac{1}{3}$.

3) Funkcija je negativna za $x\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$, a pozitivna za $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

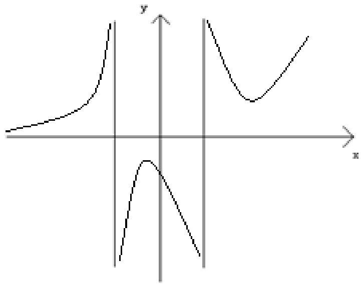
5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y=0$. Vertikalne asimptote su prave $x_1=\sqrt{3}$ i $x_2=-\sqrt{3}$.

6) $y'=\frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$ => funkcija je rastuća za $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(3,+\infty)$, a opadajuća za $x\in\left(-1,\sqrt{3}\right)\cup$

$(\sqrt{3},3)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(-1,-\frac{1}{2e}\right)$, a minimum u tački $\left(3,\frac{e^3}{6}\right)$.

7) $y" = \frac{e^x(x^4-4x^3+12x+15)}{(x^2-3)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in (-\sqrt{3},\sqrt{3})$, a konveksna za $x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



198. 1) $D = (-\infty,\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = +\infty \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0$.

2) Nema nula funkcije. Presek sa y –osom je $y = 1$.

3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.

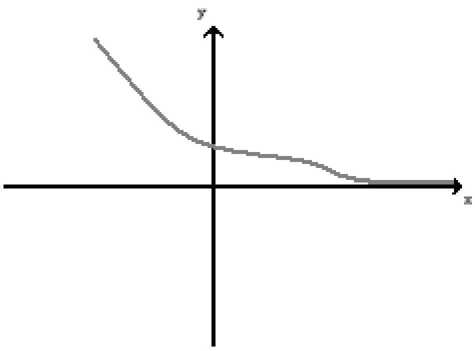
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = 0$.

6) $y' = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$ => funkcija je opadajuća na celom domenu i nema ekstremnih vrednosti.

7) $y" = \frac{x^2-4x+3}{e^x}$ => funkcija je konveksna za $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$, a konkavna za$x \in (1,3)$. Prevojne tačke su $P_1\left(1,\frac{2}{e}\right)$ i $P_2\left(3,\frac{10}{e^3}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



199. 1) $D = (-\infty,\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x+1}{e^x} = +\infty \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+1}{e^x} = 0$.

2) Nema nula funkcije. Presek sa y –osom je $y = 1$.

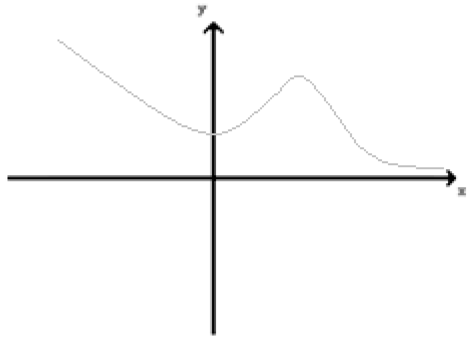
3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.

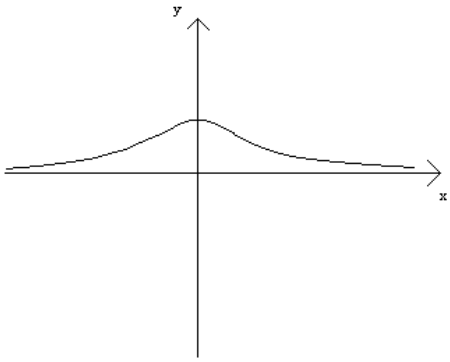
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = 0$.

6) $y' = \frac{-2x^2+3x}{e^x}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, a rastuća za $x \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$. Funkcija ima minimum u tački $(0,1)$, a maksimum u tački $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{\sqrt{e^3}}\right)$.

7) $y" = \frac{2x^2-7x+3}{e^x}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup (3,+\infty)$, a konkavna za$x \in \left(\frac{1}{2},3\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ i $P_2\left(3,\frac{22}{e^3}\right)$.

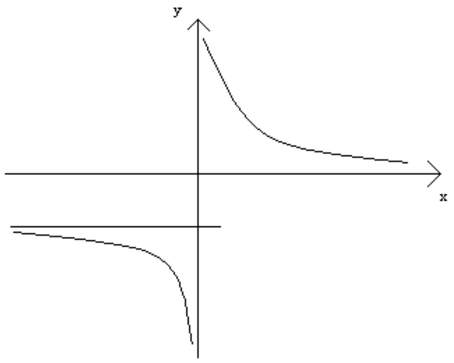


200. 1) $D=(-\infty,\infty)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2}{e^{x^2}}\right)=0\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{e^{x^2}}\right)=0.$
2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y=2$.
3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.
4) Funkcija je parna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota je prava $y=0$.
6) $y'=\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$ => funkcija je rastuća za $x\in(-\infty,0)$, a opadajuća za $x\in(0,\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački (0,2).
7) $y''=\frac{2(x+1)(x-1)(2x^2+1)}{e^{x^2}}$ => funkcija je konveksna za $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, a konkavna za$x\in(-1,1)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-1,\frac{3}{e}\right)$ i $P_2\left(1,\frac{3}{e}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



201. 1) $D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=-1\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=0$$
$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=-\infty\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=+\infty$$
2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x\in(0,\infty)$, a negativna za $x\in(-\infty,0)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y=0$, a sa leva je prava $y=-1$. Vertikalna asimptota je prava $x=0$.
6) $y'=\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}<0$ => funkcija je opadajuća na celom domenu.
7) $y''=\frac{e^x(1+e^x)}{(e^x-1)^3}$ => funkcija je konveksna za $x\in(0,\infty)$, a konkavna za $x\in(-\infty,0)$.

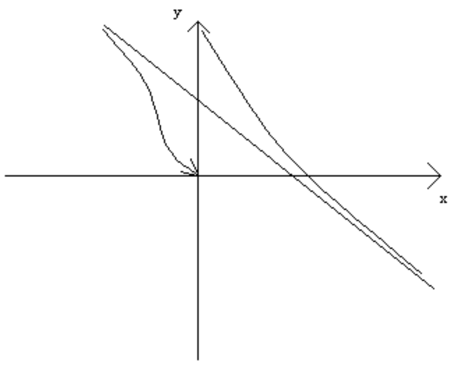
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



202. 1) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\text{-x}\right) = +\infty \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\text{-x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\text{-x}\right) = 0 \lim_{x\to0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\text{-x}\right) = +\infty$$

2) Nema preseka sa y −osom.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$. Kosa asimptota je prava $y = -x + 1$.
6) $y' = \frac{-\left(e^{\frac{1}{x}}+x^2\right)}{x^2} < 0$ => funkcija je opadajuća na celom domenu.
7) $y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$, a konkavna za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{e^2+2}{2e^2}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

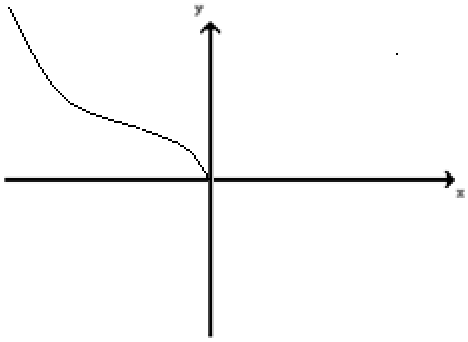


203. 1) $D = (-\infty, -1]$.

$$f(-1) = 0 \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{e^{-x} - e}\right) = +\infty.$$

2) Nula funkcije je $x = -1$. Nema preseka sa y −osom.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Nema asimptota.
6) $y' = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-e}} < 0$ => funkcija je opadajuća na celom domenu.
7) $y'' = \frac{e^{-x}(e^{-x}-2e)}{4\sqrt{(e^{-x}-e)^3}}$ => funkcija je konkavna za $x \in (-ln2 - 1, -1]$, a konveksna za $x \in (-\infty, -ln2 - 1)$. Prevojna tačka je $P\left(-ln2 - 1, \sqrt{e}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

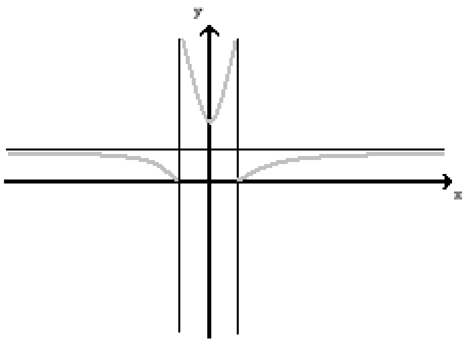


204. 1) $D = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{1-x^2}}\right) = 1 \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{1-x^2}}\right) = 1 \lim_{x\to-1^-}\left(e^{\frac{1}{1-x^2}}\right) = 0$$

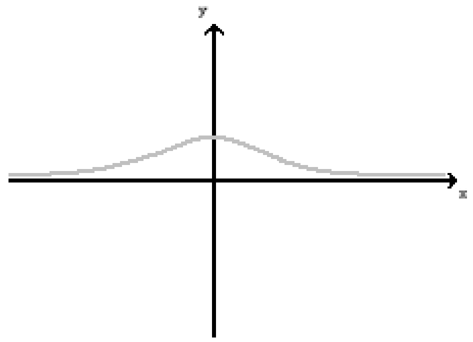
$$\lim_{x\to-1^+}\left(e^{\frac{1}{1-x^2}}\right) = +\infty \lim_{x\to1^-}\left(e^{\frac{1}{1-x^2}}\right) = +\infty \lim_{x\to1^+}\left(e^{\frac{1}{1-x^2}}\right) = 0$$

2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y = e$.
3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.
4) Funkcija je parna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 1$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 1$, a vertikalna asimptota zdesna je prava $x = -1$.
6) $y' = \frac{2xe^{\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,0)$. Funkcija ima minimum u tački $(0, e)$.
7) $y'' = \frac{2e^{\frac{1}{1-x^2}}(-3x^4+4x^2+1)}{(1-x^2)^4}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}, \infty\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}, -1\right) \cup (-1,1) \cup \left(1, \sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

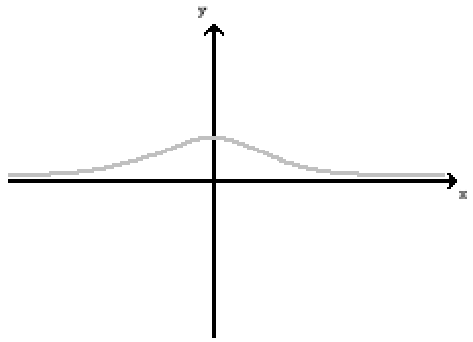


205. 1) $D = (-\infty, \infty)$.
$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-e^x}\right) = 0 \lim_{x\to\infty}\left(e^{x-e^x}\right) = 0$.
2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y = \frac{1}{e}$.
3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 0$.
6) $y' = e^{x-e^x}(1 - e^x)$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 0)$, a opadajuća za $x \in (0, \infty)$. Maksimum je tačka $M\left(0, \frac{1}{e}\right)$.
7) $y'' = e^{x-e^x}(e^{2x} - 3e^x + 1)$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\infty, ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, e^{ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)$ i $P_2\left(ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}, e^{ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

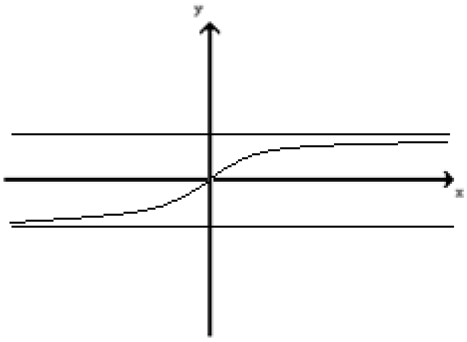


206. 1) $D = (-\infty, \infty)$.
$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x-e^{-x}}\right) = 0 \lim_{x\to\infty}\left(e^{-x-e^{-x}}\right) = 0$.
2) Nema nula funkcije. Presek sa y −osom je $y = \frac{1}{e}$.
3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota je prava $y = 0$.
6) $y' = e^{-x-e^{-x}}(e^{-x} - 1)$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 0)$, a opadajuća za $x \in (0, \infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.
7) $y'' = e^{-x-e^{-x}}(e^{-2x} - 3e^{-x} + 1)$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\infty, -ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}, e^{ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$ i $P_2\left(-ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, e^{ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

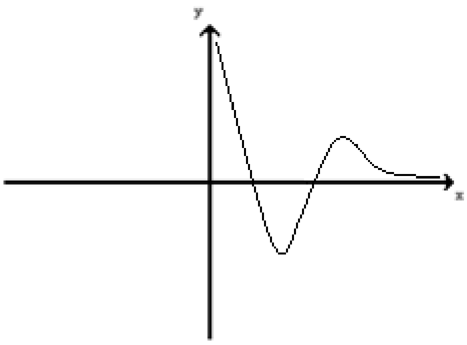


207. 1) $D = (-\infty, \infty)$.
$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = -1 \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = 1$.
2) Nula funkcije je x=0. Presek sa y −osom je $y = 0$.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0, +\infty)$, a negativna za $x \in (-\infty, 0)$.
4) Funkcija je neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota sa desna je prava $y = 1$, a sa leva $y = -1$.
6) $y' = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema.
7) $y'' = \frac{-8(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in (0, +\infty)$, a konveksna za $x \in (-\infty, 0)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



208. 1) $D = (0, \infty)$.
$\lim_{x\to 0^+} \frac{ln^2 x + 2\ln x}{x} = +\infty \lim_{x\to\infty} \frac{ln^2 x + 2\ln x}{x} = 0$.
2) Nule funkcije su $x = 1$ i $x = \frac{1}{e^2}$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$, a pozitivna za $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, \infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota sa desna je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota je prava $x = 0$.
6) $y' = \frac{2 - ln^2 x}{x^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right)$, a opadajuća za $x \in \left(0, e^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(e^{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(e^{\sqrt{2}}, 2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\right)$, a minimum u tački $\left(e^{-\sqrt{2}}, 2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}\right)$.
7) $y'' = \frac{2(ln^2 x - ln x - 2)}{x^3}$=> funkcija je konkavna za $x \in \left(\frac{1}{e}, e^2\right)$, a konveksna za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e^2, +\infty)$. Prevojne tačke su $P_1\left(\frac{1}{e}, -e\right)$ i $P_2\left(e^2, \frac{8}{e^2}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

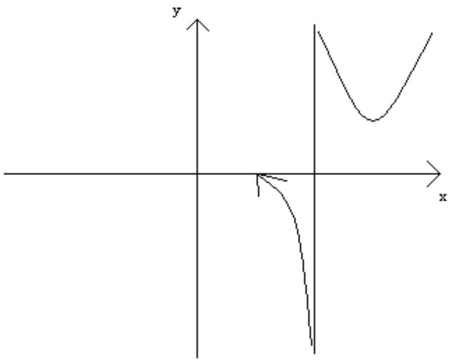


209. 1)$D = (2,3) \cup (3, \infty)$.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{ln(x-2)} = 0 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{ln(x-2)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{ln(x-2)} = -\infty \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{ln(x-2)} = +\infty$$

2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in (2,3)$, a pozitivna za $x \in (3, \infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota je prava $x = 3$.
6) $y' = \frac{(x-2)[2ln(x-2)-1]}{ln^2(x-2)}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (2,3) \cup \left(3, \sqrt{e}+2\right)$, a rastuća za $x \in \left(\sqrt{e}+2, \infty\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(\sqrt{e}+2, 2e\right)$.
7) $y'' = \frac{2ln^2(x-2) - 3ln(x-2) + 2}{ln^3(x-2)}$ => funkcija je konkavna za $x \in (2,3)$, a konveksna za $x \in (3, \infty)$.

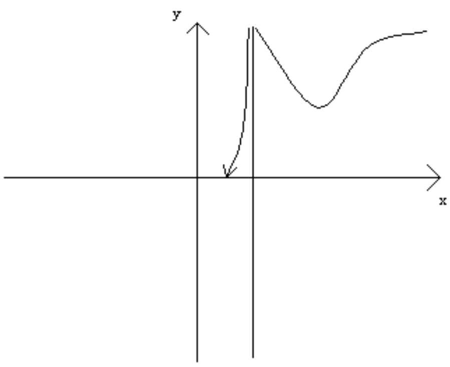
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



210. 1) $D=(1,2)\cup(2,\infty)$.

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{ln^2(x-1)}\right)=0\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{ln^2(x-1)}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x-1}{ln^2(x-1)}\right)=+\infty\ \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x-1}{ln^2(x-1)}\right)=+\infty$$

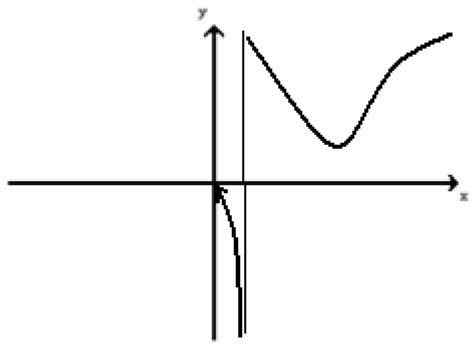
2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota je prava $x=2$.
6) $y'=\frac{ln(x-1)-2}{ln^3(x-1)}$ => funkcija je opadajuća za $x\in(2,e^2+1)$, a rastuća za $x\in(1,2)\cup(e^2+1,\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(e^2+1,\frac{e^2}{4}\right)$.
7) $y''=\frac{6-2ln(x-1)}{(x-1)ln^4(x-1)}$ => funkcija je konkavna za $x\in(e^3+1,\infty)$, a konveksna za $x\in(1,2)\cup(2,e^3+1)$. Prevojna tačka je $P\left(e^3+1,\frac{e^3}{9}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



211. 1) $D=(0,1)\cup(1,\infty)$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}=0\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{\ln x}=-\infty\ \lim_{x\to1^+}\frac{x}{\ln x}=+\infty$$

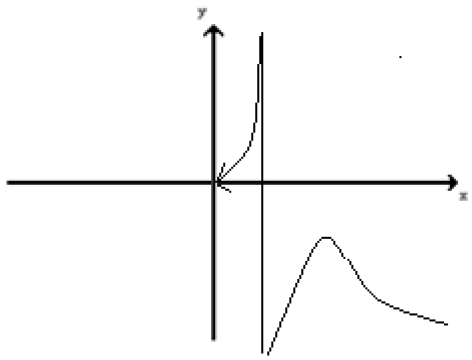
2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x\in(0,1)$, a pozitivna za $x\in(1,\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota je prava $x=1$.
6) $y'=\frac{lnx-1}{ln^2x}$ => funkcija je opadajuća za $x\in(0,1)\cup(1,e)$, a rastuća za $x\in(e,+\infty)$. Funkcija ima minimum u tački (e,e).
7) $y''=\frac{2-lnx}{xln^3x}$ => funkcija je konkavna za $x\in(0,1)\cup(e^2,+\infty)$, a konveksna za $x\in(1,e^2)$. Prevojna tačka je $P\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



212. 1) $D = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{1-\ln x} = 0 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1-\ln x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to e^-} \frac{2x}{1-\ln x} = +\infty \quad \lim_{x\to e^+} \frac{2x}{1-\ln x} = -\infty$$

2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0, e)$, a negativna za $x \in (e, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota je prava $x = e$.
6) $y' = \frac{2(2-\ln x)}{(1-\ln x)^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (0, e) \cup (e, e^2)$, a opadajuća za $x \in (e^2, +\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $(e^2, -2e^2)$.
7) $y'' = \frac{2(3-\ln x)}{x(1-\ln x)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in (0, e) \cup (e^3, +\infty)$, a konkavna za $x \in (e, e^3)$. Prevojna tačka je $P(e^3, -e^3)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

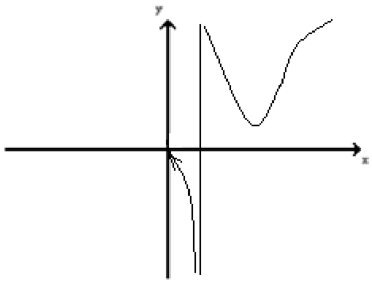


213. 1) $D = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+\ln x} = 0 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+\ln x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} \frac{x}{1+\ln x} = -\infty \quad \lim_{x\to \frac{1}{e}^+} \frac{x}{1+\ln x} = +\infty$$

2) Nema nula funkcije. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota je prava $x = \frac{1}{e}$.
6) $y' = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, a rastuća za $x \in (1, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(1,1)$.
7) $y'' = \frac{1-\ln x}{x(1+\ln x)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$, a konveksna za $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$. Prevojna tačka je $P\left(e, \frac{e}{2}\right)$.

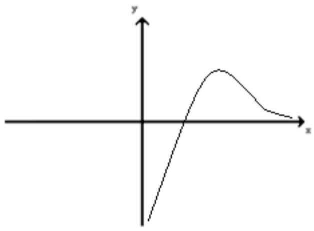
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



214. 1) $D = (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{lnx - 1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{lnx - 1}{x} = 0$$

2) Nula funkcije je $x = e$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (e, +\infty)$, a negativna za $x \in (0, e)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota sa desna je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota sa desna je prava $x = 0$.
6) $y' = \frac{2-\ln x}{x^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in (0, e^2)$, a opadajuća za $x \in (e^2, +\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$.
7) $y'' = \frac{2lnx-5}{x^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(\sqrt{e^5}, +\infty\right)$, a konkavna za $x \in \left(0, \sqrt{e^5}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(\sqrt{e^5}, \frac{3}{2\sqrt{e^5}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

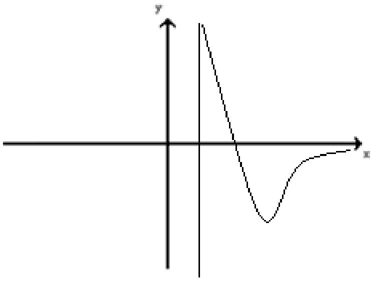


215. 1) $D = (4, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1 - \ln(x-4)}{x-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \ln(x-4)}{x-4} = 0$$

2) Nula funkcije je $x = e + 4$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in (e + 4, +\infty)$, a pozitivna za $x \in (4, e + 4)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota sa desna je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota sa desna je prava $x = 4$.
6) $y' = \frac{\ln(x-4)-2}{(x-4)^2}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (4, e^2 + 4)$, a rastuća za $x \in (e^2 + 4, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(e^2 + 4, \frac{-1}{e^2}\right)$.
7) $y'' = \frac{5-2\ln(x-4)}{(x-4)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(4 + \sqrt{e^5}, +\infty\right)$, a konveksna za $x \in \left(0{,}4 + \sqrt{e^5}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(4 + \sqrt{e^5}, \frac{-3}{2\sqrt{e^5}}\right)$.

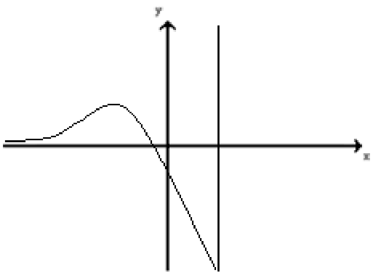
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



216. 1) $D = (-\infty, 3)$.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2-\ln(3-x)}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{2-\ln(3-x)}{x-3} = 0$$

2) Nula funkcije je $x = 3 - e^2$. Presek sa y −osom je $y = \frac{ln3-2}{3}$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (3-e^2, 3)$, a pozitivna za $x \in (-\infty, 3-e^2)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = -3$.
6) $y' = \frac{\ln(3-x)-3}{(x-3)^2}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (3-e^3, 3)$, a rastuća za $x \in (-\infty, 3-e^3)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(3-e^3, \frac{1}{e^3}\right)$.
7) $y'' = \frac{7-2\ln(3-x)}{(x-3)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(3-e^{7/2}, 3\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\infty, 3-e^{7/2}\right)$. Prevojna tačka je $P\left(3-e^{7/2}, \frac{5}{2\sqrt{e^7}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled

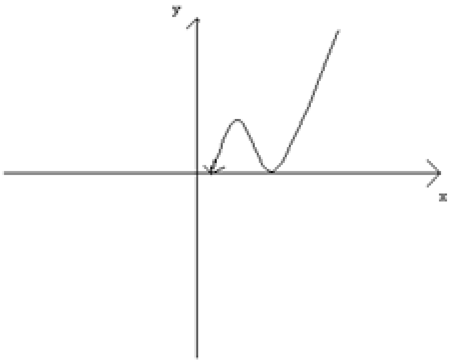


217. 1) $D = (1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 1^+}\left((x-1)\,ln^2(x-1)\right) = 0 \ \lim_{x\to +\infty}\left((x-1)\,ln^2(x-1)\right) = +\infty.$$

2) Nula funkcije je $x = 2$. Nema preseka sa y −osom.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Funkcija nema asimptota.
6) $y' = ln(x-1)[ln(x-1)+2]$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(1+\frac{1}{e^2}, 2\right)$, a rastuća za $x \in \left(1, 1+\frac{1}{e^2}\right) \cup (2, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(2,0)$, a maksimum u tački $\left(1+\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$.
7) $y'' = \frac{2[ln(x-1)+1]}{x-1}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(1, 1+\frac{1}{e}\right)$, a konveksna za $x \in \left(1+\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Prevojna tačka je$P\left(1+\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

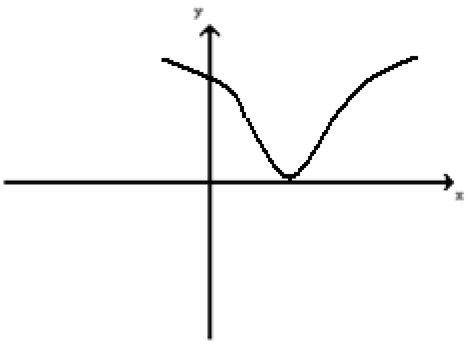
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



218. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} ln(x^2 - 8x + 17) = +\infty \lim_{x\to\infty} ln(x^2 - 8x + 17) = +\infty.$$

2) Nula funkcije je $x = 4$. Presek sa y −osom je $y = ln17$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Funkcija nema asimptota.
6) $y' = \frac{2(x-4)}{x^2-8x+17}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, 4)$, a rastuća za $x \in (4, \infty)$. Funkcija ima minimum u tački (4,0).
7) $y'' = \frac{2(-x^2+8x-15)}{(x^2-8x+17)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$, a konveksna za $x \in (3,5)$. Prevojne tačke su $P_1(3, ln2)$ i $P_2(5, ln2)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

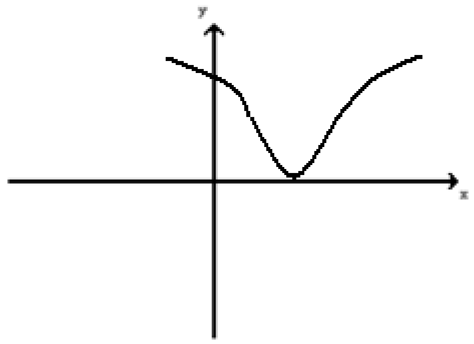


219. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} ln(x^2 - 6x + 10) = +\infty \lim_{x\to\infty} ln(x^2 - 6x + 10) = +\infty.$$

2) Nula funkcije je $x = 3$. Presek sa y −osom je $y = ln10$.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Funkcija nema asimptota.
6) $y' = \frac{2(x-3)}{x^2-6x+10}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-\infty, 3)$, a rastuća za $x \in (3, \infty)$. Funkcija ima minimum u tački (3,0).
7) $y'' = \frac{2(-x^2+6x-8)}{(x^2-6x+10)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, a konveksna za $x \in (2,4)$. Prevojne tačke su $P_1(2, ln2)$ i $P_2(4, ln2)$.

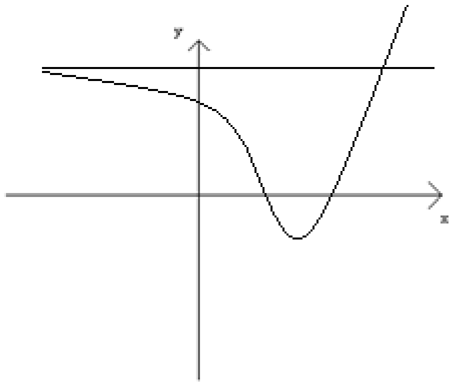
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



220. 1) $D = (-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(ln(e^{2x} - 5e^x + 7)) = ln\,7 \lim_{x\to\infty}(ln(e^{2x} - 5e^x + 7)) = +\infty.$$

2) Nula funkcije je $x_1 = ln2$ i $x_2 = ln3$. Presek sa y −osom je $y = ln3$.
3) $y > 0$ za $x \in (-\infty, ln2) \cup (ln3, +\infty)$, a $y < 0$ za $x \in (ln2, ln3)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y = ln7$. Kosa asimptota zdesna je prava $y = 2x$.
6) $y' = \frac{e^x(2e^x-5)}{e^{2x}-5e^x+7}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(-\infty, ln\frac{5}{2}\right)$, a rastuća za $x \in \left(ln\frac{5}{2}, \infty\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(ln\frac{5}{2}, ln\frac{3}{4}\right)$.
7) $y" = \frac{e^x(-5e^{2x}+28e^x-35)}{(e^{2x}-5e^x+7)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\infty, ln\frac{14-\sqrt{21}}{5}\right) \cup \left(ln\frac{14+\sqrt{21}}{5}, \infty\right)$, a konveksna za $x \in \left(ln\frac{14-\sqrt{21}}{5}, ln\frac{14+\sqrt{21}}{5}\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(ln\frac{14-\sqrt{21}}{5}, f\left(ln\frac{14-\sqrt{21}}{5}\right)\right)$ i $P_2\left(ln\frac{14+\sqrt{21}}{5}, f\left(ln\frac{14+\sqrt{21}}{5}\right)\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

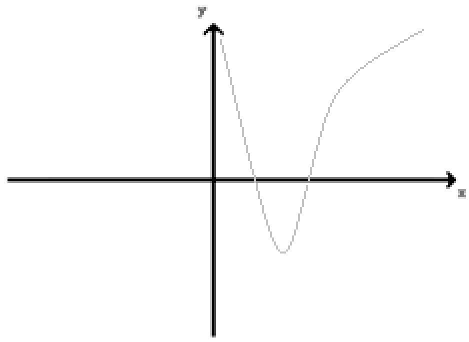


221. 1) $D = (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to0^+}(ln^2 x - 4\,ln\,x + 3) = +\infty \lim_{x\to\infty}(ln^2 x - 4\,ln\,x + 3) = +\infty.$$

2) Nule funkcije su $x = e$ i $x = e^3$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0, e) \cup (e^3, +\infty)$, a negativna za $x \in (e, e^3)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$.
6) $y' = \frac{2(lnx-2)}{x}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (0, e^2)$, a rastuća za $x \in (e^2, \infty)$. Funkcija ima minimum u tački $(e^2, -1)$.
7) $y" = \frac{2(3-lnx)}{x^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in (e^3, \infty)$, a konveksna za $x \in (0, e^3)$. Prevojna tačka je $P(e^3, 0)$.

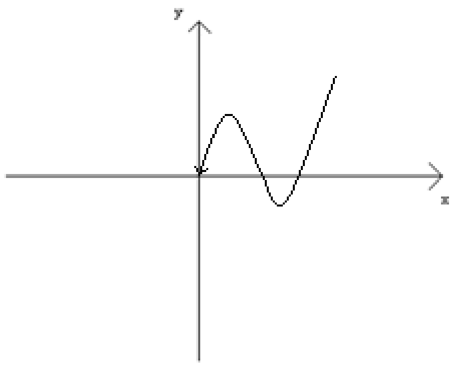
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



222. 1) $D = (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to0^+}\left(x(ln^2 x - ln\, x^2)\right) = 0 \lim_{x\to\infty}\left(x(ln^2 x - ln\, x^2)\right) = +\infty.$$

2) Nule funkcije su $x = 1$ i $x = e^2$. Nema preseka sa y –osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (0,1) \cup (e^2, \infty)$, a negativna za $x \in (1, e^2)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Nema asimptota.
6) $y' = ln^2 x - 2$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right)$, a rastuća za $x \in \left(0, e^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(e^{\sqrt{2}}, \infty\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(e^{\sqrt{2}}, (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}\right)$, a maksimum u tački $\left(e^{-\sqrt{2}}, (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\right)$
7) $y'' = \frac{2lnx}{x}$ => funkcija je konkavna za $x \in (0,1)$, a konveksna za $x \in (1, \infty)$. Prevojna tačka je $P(1,0)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

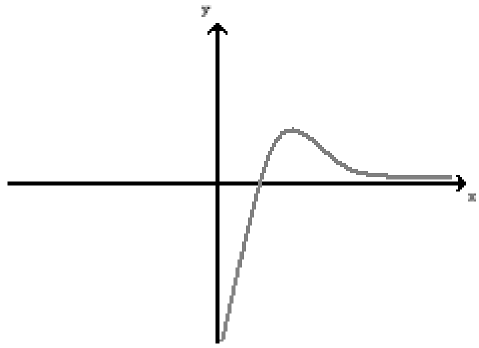


223. 1) $D = (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{ln\, x}{\sqrt{x}} = -\infty \lim_{x\to\infty}\frac{ln\, x}{\sqrt{x}} = 0$$

2) Nula funkcije je$x = 1$. Nema preseka sa y –osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in (0,1)$, a pozitivna za $x \in (1, \infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$.
6) $y' = \frac{2-lnx}{2\sqrt{x^3}} 0$ => funkcija je opadajuća za $x \in (e^2, \infty)$, a rastuća za $x \in (0, e^2)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
7) $y'' = \frac{3lnx-8}{4\sqrt{x^5}}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(0, \sqrt[3]{e^8}\right)$, a konveksna za $x \in \left(\sqrt[3]{e^8}, \infty\right)$. Prevojna tačka je $P\left(\sqrt[3]{e^8}, \frac{8}{3\sqrt[3]{e^4}}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



224. 1) $D = (-1,0) \cup (1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to -1^+}\left(ln\frac{x}{x^2-1}\right) = +\infty \lim_{x\to\infty}\left(ln\frac{x}{x^2-1}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(ln\frac{x}{x^2-1}\right) = -\infty \lim_{x\to 1^+}\left(ln\frac{x}{x^2-1}\right) = +\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nema preseka sa y –osom.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, a negativna za $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

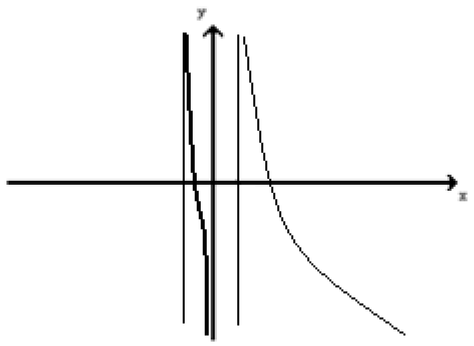
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 1$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 0$. Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = -1$.

6) $y' = -\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ => funkcija je opadajuća na celom domenu i nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

7) $y'' = \frac{x^4+4x^2-1}{x^2(x^2-1)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}, 0\right)$, a konveksna za $x \in \left(-1, -\sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \cup (1,+\infty)$. Prevojna tačka je $P_1\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}, f\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



225. 1) $D = (-1,0) \cup (1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to -1^+}\left(ln\frac{x^3}{x^2-1}\right) = +\infty \lim_{x\to +\infty}\left(ln\frac{x^3}{x^2-1}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(ln\frac{x^3}{x^2-1}\right) = -\infty \lim_{x\to 1^+}\left(ln\frac{x^3}{x^2-1}\right) = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = x_1$ $(-1 < x_1 < 0)$. Nema preseka sa y –osom.

3) Funkcija je pozitivna za $x \in (x_1, 0) \cup (1,+\infty)$, a negativna za $x \in (-1, x_1)$.

4) Funkcija nije ni parna ni neparna.

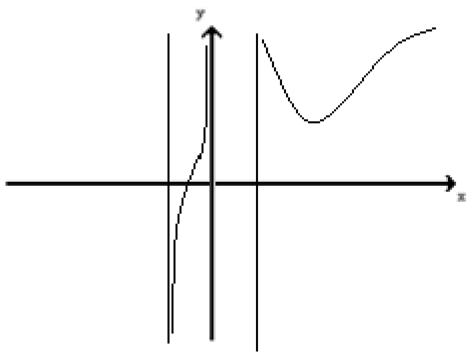
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 1$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 0$. Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = -1$.

6) $y' = \frac{x^2-3}{x(x^2-1)}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-1,0) \cup (1, \sqrt{3})$, a rastuća za $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$. Funkcija ima minimum u

tački $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

7) $y'' = \frac{-x^4+8x^2-3}{x^2(x^2-1)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-1, -\sqrt{4-\sqrt{13}}\right) \cup \left(\sqrt{4+\sqrt{13}}, +\infty\right)$, a konveksna za $x \in \left(-\sqrt{4-\sqrt{13}}, 0\right) \cup \left(1, \sqrt{4+\sqrt{13}}\right)$. Prevojne tačke su $P_1\left(-\sqrt{4-\sqrt{13}}, f\left(-\sqrt{4-\sqrt{13}}\right)\right)$ i $P_2\left(\sqrt{4+\sqrt{13}}, f\left(\sqrt{4+\sqrt{13}}\right)\right)$.

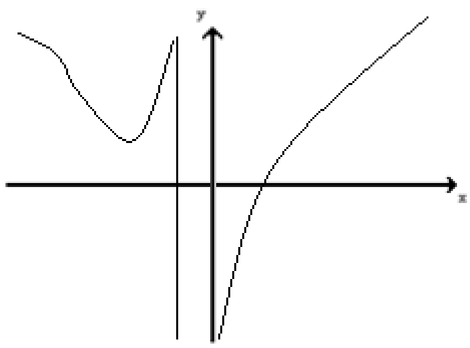
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



226. 1) $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to -1^-} ln\frac{x^3}{x+1} = +\infty \quad \lim_{x\to +\infty} ln\frac{x^3}{x+1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} ln\frac{x^3}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x\to -\infty} ln\frac{x^3}{x+1} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $1 < x_1 < 2$. Nema preseka sa y –osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in (-\infty, -1) \cup (x_1, +\infty)$, a negativna za $x \in (0, x_1)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna. Funkcija nije periodična.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = -1$.
6) $y' = \frac{2x+3}{x(x+1)}$ => funkcija je opadajuća za $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, a rastuća za $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (0, +\infty)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(-\frac{3}{2}, ln\frac{27}{4}\right)$.
7) $y'' = \frac{-2x^2-6x-3}{x^2(x+1)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, a konveksna za $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}, -1\right)$. Prevojna tačka je $P_1\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

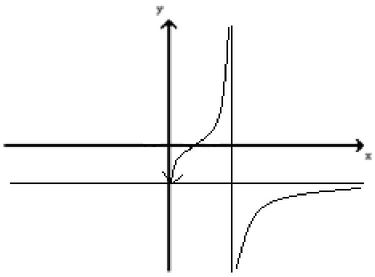


227. 1) $D = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+ln\,x}{1-ln\,x} = -1 \quad \lim_{x\to \infty} \frac{1+ln\,x}{1-ln\,x} = -1$$
$$\lim_{x\to e^-} \frac{1+ln\,x}{1-ln\,x} = -\infty \quad \lim_{x\to e^+} \frac{1+ln\,x}{1-ln\,x} = +\infty$$

2) Nula funkcije je $x = \frac{1}{e}$. Nema preseka sa y –osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$, a negativna za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = -1$. Vertikalna asimptota je prava $x = e$.

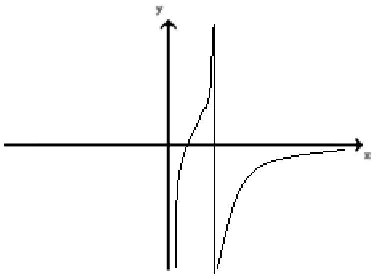
6) $y' = \frac{2}{x(1-lnx)^2}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
7) $y'' = \frac{2(lnx+1)}{x^2(1-lnx)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$, a konveksna za $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$. Prevojna tačka je $P_1\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



228. 1) $D = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 1}{x - x\ln x} = -\infty \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{x - x\ln x} = 0$$
$$\lim_{x\to e^-} \frac{\ln x + 1}{x - x\ln x} = +\infty \quad \lim_{x\to e^+} \frac{\ln x + 1}{x - x\ln x} = -\infty$$

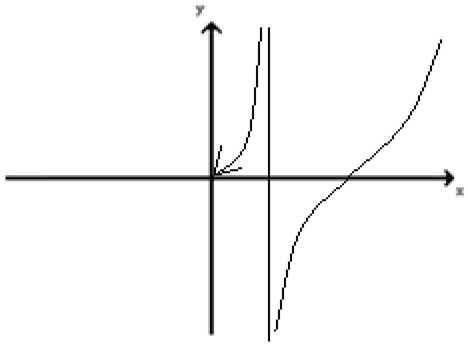
2) Nula funkcije je $x = \frac{1}{e}$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je pozitivna za $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$, a negativna za $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = 0$. Vertikalna asimptota je prava $x = e$. $x = 0$ je vertikalna asimptota zdesna.
6) $y' = \frac{ln^2x+1}{x^2(1-lnx)^2}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
7) $y'' = \frac{2lnx(ln^2x-lnx+2)}{x^3(1-lnx)^3}$ => funkcija je konkavna za $x \in (0,1) \cup (e, +\infty)$, a konveksna za $x \in (1, e)$. Prevojna tačka je $P_1(1,1)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



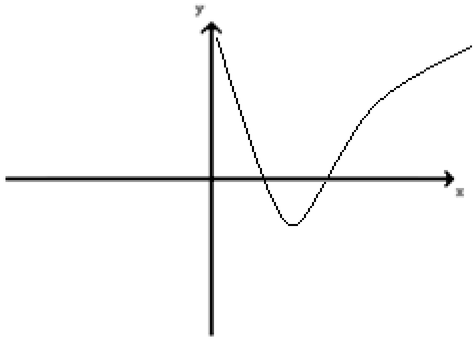
229. 1) $D = \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup \left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(\ln x - 2)}{\ln x + 2} = 0 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x(\ln x - 2)}{\ln x + 2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{e^2}^-} \frac{x(\ln x - 2)}{\ln x + 2} = +\infty \quad \lim_{x\to \frac{1}{e^2}^+} \frac{x(\ln x - 2)}{\ln x + 2} = -\infty$$

2) Nula funkcije je $x = e^2$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(\frac{1}{e^2}, e^2\right)$, a pozitivna za $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (e^2, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Nema horizontalnu asimptotu. Vertikalna asimptota je prava $x = e^2$. Nema kose asimptote.
6) $y' = \frac{ln^2x}{(lnx+2)^2}$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
7) $y'' = \frac{4lnx}{x(lnx+2)^3}$ => funkcija je konveksna za $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty)$, a konkavna za $x \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$. Prevojna tačka je $P_1(1, -1)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



230. 1) $D = (0, +\infty)$.
$\lim_{x\to 0^+} ln(ln^2 x - ln\, x + 1) = +\infty \lim_{x\to\infty} ln(ln^2 x - ln\, x + 1) = +\infty$
2) Nule funkcije su $x_1 = 1\; i\; x_2 = e$. Nema preseka sa y −osom.
3) Funkcija je negativna za $x \in (1, e)$, a pozitivna za $x \in (0,1) \cup (e, +\infty)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 0$.
6) $y' = \frac{2lnx-1}{x(ln^2x-lnx+1)}$ => funkcija je rastuća za $x \in \left(\sqrt{e}, +\infty\right)$, a opadajuća za $x \in \left(0, \sqrt{e}\right)$. Funkcija ima minimum u tački $\left(\sqrt{e}, ln\frac{3}{4}\right)$.
7) $y'' = \frac{-2ln^3x+ln^2x-lnx+2}{x^2(ln^2x-lnx+1)^2}$ => funkcija je konkavna za $x \in (e, +\infty)$, a konveksna za $x \in (0, e)$. Prevojna tačka je $P_1(e, 0)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

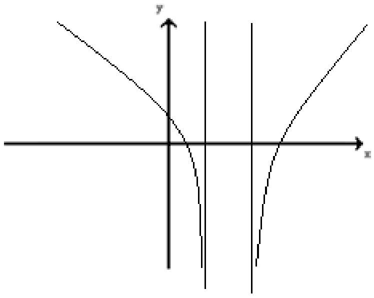


231. 1) $D = (-\infty, 2)(4, +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} ln\sqrt{x^2-6x+8} = +\infty \lim_{x\to\infty} ln\sqrt{x^2-6x+8} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} ln\sqrt{x^2-6x+8} = -\infty \lim_{x\to 4^+} ln\sqrt{x^2-6x+8} = -\infty$$

2) Nule funkcije su $x_1 = 3 - \sqrt{2}\; i\; x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Presek sa y −osom je $y = ln\sqrt{8}$.
3) Funkcija je negativna za $x \in \left(3-\sqrt{2}, 2\right) \cup \left(4, 3+\sqrt{2}\right)$, a pozitivna za $x \in \left(-\infty, 3-\sqrt{2}\right) \cup \left(3+\sqrt{2}, +\infty\right)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Vertikalna asimptota zdesna je prava $x = 4$. Vertikalna asimptota sa leva je prava $x = 2$.
6) $y' = \frac{x-3}{x^2-6x+8}$ => funkcija je rastuća za $x \in (4, +\infty)$, a opadajuća za $x \in (-\infty, 2)$. Funkcija nema lokalnih ekstrema.
7) $y'' = \frac{-x^2+6x-10}{(x^2-6x+8)^2}$ => funkcija je konkavna na celom domenu i nema prevojnih tačaka.

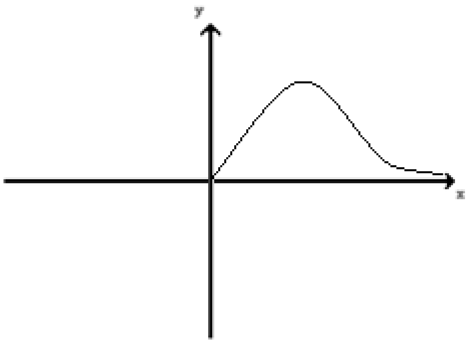
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



232. 1) $D = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right), f\left(\frac{1}{e}\right) = 0.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} = 0$$

2) Nula funkcije je $x = \frac{1}{e}$. Nema preseka sa y −osom.
3) $y \geq 0$ na celom domenu.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota zdesna je prava $y = 0$.
6) $y' = \frac{-2\ln x - 1}{2\sqrt{1+\ln x}\cdot x^2}$ => funkcija je rastuća za $x \in [\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{2}})$, a opadajuća za $x \in \left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(e^{-\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}}\right)$.
7) $y'' = \frac{8\ln^2 x + 10\ln x + 1}{4x^3\sqrt{(1+\ln x)^3}}$ => funkcija je konkavna za $x \in [\frac{1}{e}, e^{\frac{\sqrt{17}-5}{8}})$, a konveksna za $x \in \left(e^{\frac{\sqrt{17}-5}{8}}, +\infty\right)$. Prevojna tačka je $P_1\left(e^{\frac{\sqrt{17}-5}{8}}, \sqrt{\frac{\sqrt{17}+3}{8} e^{\frac{5-\sqrt{17}}{8}}}\right)$.
8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:

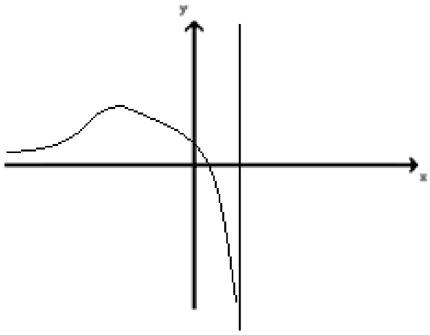


233. 1) $D = (-\infty, 2)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2-x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2-x}} = -\infty$$

2) Nula funkcije je $x = 1$. Presek sa y −osom je $y = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$.
3) Funkcija je negativna za $x \in (1,2)$, a pozitivna za $x \in (-\infty, 1)$.
4) Funkcija nije ni parna ni neparna.
5) Horizontalna asimptota sa leva je prava $y = 0$. Vertikalna asomptota sa leva je prava $x = 2$.
6) $y' = \frac{\ln(2-x) - 2}{2\sqrt{(2-x)^3}}$ => funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, 2 - e^2)$ a opadajuća za $x \in (2 - e^2, 2)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(2 - e^2, \frac{2}{e}\right)$.
7) $y'' = \frac{3\ln(2-x) - 8}{4\sqrt{(2-x)^5}}$ => funkcija je konkavna za $x \in (2 - \sqrt[3]{e^8}, 2)$, a konveksna za $x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt[3]{e^8}\right)$. Prevojna tačka je $P_1\left(2 - \sqrt[3]{e^8}, \frac{8}{3\sqrt[3]{e^4}}\right)$.

8) Grafik funkcije ima sledeći izgled:



234. $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$ => funkcija je opadajuća za $x \in (-3,-1)$, a rastuća za $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$. Funkcija ima maksimum u tački $\left(-3,-\frac{27}{8}\right)$.
235. $y' = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$ => funkcija je rastuća na celom domenu i nema lokalnih ekstrema.
236. Funkcija je konveksna za $x \in (3,5)$, a konkavna za $x \in (-\infty,3) \cup (5,+\infty)$. Prevojne tačke su $P_1(3,ln2)$ i $P_2(5,ln2)$.
237. Funkcija je konkavna za $x \in (0,\infty)$, a konveksna za $x \in (-\infty,0)$. Prevojna tačka je $P(0,0)$.
238. Neka su $M=(x_1,y_1,z_1) \in R^3$, $N=(x_2,y_2,z_2) \in R^3$ i $P=(x_3,y_3,z_3) \in R^3$.
Metrika $d(M,N)$ se definiše kao: $d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
Dokažimo da je trodimenzionalni euklidski prostor jedan metrički prostor.
1) Kako je $d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \Rightarrow d(M,N) \geq 0.$ √
2) Ako je $d(M,N)=0 \Rightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=0 \Rightarrow x_1=x_2 \wedge y_1=y_2 \wedge z_1=z_2 \Rightarrow M=N$,
Ako je $M=N \Rightarrow x_1=x_2 \wedge y_1=y_2 \wedge z_1=z_2 \Rightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=0 \Rightarrow d(M,N)=0$ √
3) $d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=d(N,M)$ √
4) Treba dokazati da je $d(M,N)+d(N,P) \geq d(M,P)$. Dokaz je malo složeniji i radićemo ga na samom kursu.
239. $\Delta f_x = f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\Delta x+2ye^{x^2-y^2}\left(e^{\Delta x(2x+\Delta x)}-1\right)$
$\Delta f_y = f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=2ye^{x^2-y^2}\left(e^{-\Delta y(2y+\Delta y)}-1\right)+\Delta ye^{x^2-(y+\Delta y)^2}$
$\Delta f = f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta x+2ye^{x^2-y^2}\left(e^{\Delta x(2x+\Delta x)-\Delta y(2y+\Delta y)}-1\right)+\Delta ye^{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2}$.
240. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$, a $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$ => $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$.
241. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, a $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}$ => $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$.
242. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=arctg(x^2-y^2)+\frac{2x^2}{1+(x^2-y^2)^2}$, a $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2xy}{1+(x^2-y^2)^2}$ => $\frac{1}{yz}\left(xy\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=1$.
243. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}$ => $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
244. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}$ =>
245. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}y^{\frac{y}{x}}\left(lnysin\frac{y}{x}+cos\frac{y}{x}\right)$, a $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}y^{\frac{y}{x}}\left(lnysin\frac{y}{x}+sin\frac{y}{x}+cos\frac{y}{x}\right)$ => $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=yz$.
246. $e^{3x}arctg(2y) \approx 2y+6xy$.
247. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=141-6x-y$ i $\frac{\partial z}{\partial y}=188-x-8y$ => stacionarna tačka je $M(20,21)$. Kako je $A=-6, B=-1$ i $C=-8$, dobija se:
$M(20,21)$ => $A=-6, B=-1, C=-8$ i $\Delta=-47$, pa je $M(20,21)$ lokalni maksimum i $z_{max}=3384$.
248. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=6x-4y-2$ i $\frac{\partial z}{\partial y}=-4x+2y+4$ => stacionarna tačka je $M(3,4)$. Kako je $A=6, B=-4$ i $C=2$, dobija se:
$M(3,4)$ => $A=6, B=-4, C=2$ i $\Delta=4$, pa $M(3,4)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
Dakle, funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti.
249. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=3y-3x^2$ i $\frac{\partial z}{\partial y}=3x-3y^2$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ i $M_2(1,1)$. Kako je $A=-6x, B=3$ i $C=-6y$, dobija se:
$M_1(0,0)$ => $A=0, B=3, C=0$ i $\Delta=9$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost,
$M_2(1,1)$ => $A=-6, B=3, C=-6$ i $\Delta=-27$, pa je $M_2(1,1)$ lokalni maksimum i $z_{max}=1$.
250. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}=12y-3x^2$ i $\frac{\partial z}{\partial y}=12x-3y^2$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ i $M_2(4,4)$. Kako je $A=-6x, B=3$ i $C=-6y$, dobija se:

$M_1(0,0) => A = 0, B = 12, C = 0$ i $\Delta = 9$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost,
$M_2(4,4) => A = -24,\ B = 12, C = -24$ i $\Delta = -432$, pa je $M_2(4,4)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 64$.

251. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 18y$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 18x$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0)\ i\ M_2(6,6)$. Kako je $A = 6x, B = -18$ i $C = 6y$, dobija se:
$M_1(0,0) => A = 0, B = -18, C = 0$ i $\Delta = 324$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost,
$M_2(6,6) => A = 36,\ B = -18, C = 36$ i $\Delta = -972$, pa je $M_2(6,6)$ lokalni minimum i $z_{min} = -216$.

252. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 27$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 12$ => stacionarne tačke su $M_1(3,2), M_2(3,-2), M_3(-3,2)$ i $M_4(-3,-2)$. Kako je $A = 6x, B = 0$ i $C = 6y$, dobija se:
$M_1(3,2) => A = 18, B = 0, C = 12$ i $\Delta = -216$, pa je $M_1(3,2)$ lokalni minimum i $z_{min} = -70$.
$M_2(3,-2) => A = 18, B = 0, C = -12$ i $\Delta = 216$, pa $M_2(3,-2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_3(-3,2) => A = -18, B = 0, C = 12$ i $\Delta = 216$, pa $M_3(-3,2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_4(-3,-2) => A = -18, B = 0, C = -12$ i $\Delta = -216$, pa je $M_4(-3,-2)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 70$.

253. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6x - 9$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6y$ => stacionarne tačke su $M_1(3,0), M_2(3,2), M_3(-1,0)$ i $M_4(-1,2)$. Kako je $A = 6x - 6, B = 0$ i $C = 6y - 6$, dobija se:
$M_1(3,0) => A = 12, B = 0, C = -6$ i $\Delta = 72$, pa $M_1(3,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_2(3,2) => A = 12, B = 0, C = 6$ i $\Delta = -72$, pa je $M_2(3,2)$ lokalni minimum i $z_{min} = -31$.
$M_3(-1,0) => A = -12, B = 0, C = -6$ i $\Delta = -72$, pa je $M_3(-1,0)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 5$.
$M_4(-1,2) => A = -12, B = 0, C = 6$ i $\Delta = 72$, pa $M_4(-1,2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

254. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 2y$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0)\ i\ M_2(6,18)$. Kako je $A = 6x, B = -6$ i $C = 2$, dobija se:
$M_1(0,0) => A = 0, B = -6, C = 2$ i $\Delta = 36$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost,
$M_2(6,18) => A = 36, B = -6, C = 2$ i $\Delta = -36$, pa je $M_2(6,18)$ lokalni minimum i $z_{min} = -92$.

255. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0),\ M_2(1,0)$ i $M_3(-1,0)$. Kako je $A = 12x^2 - 4, B = 0$ i $C = 12y^2$, dobija se:
$M_1(0,0) => A = -4, B = 0, C = 0$ i $\Delta = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_2(1,0) => A = 8, B = 0, C = 0$ i $\Delta = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_3(-1,0) => A = 8, B = 0, C = 0$ i $\Delta = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.

256. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 4xy$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 4y + 1$ => stacionarne tačke su $M_1\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Kako je $A = 12x^2 + 4y, B = 4x$ i $C = 4$, dobija se:
$M_1\left(0, -\frac{1}{4}\right) => A = -1, B = 0, C = 4$ i $\Delta = 4$, pa $M_1\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) => A = 4, B = 2\sqrt{2}, C = 4$ i $\Delta = -8$, pa je $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{1}{4}$.
$M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) => A = 4, B = -2\sqrt{2}, C = 4$ i $\Delta = -8$, pa je $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{1}{4}$.

257. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 6y$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 2y$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ i $M_2(3,-9)$. Kako je $A = 12x, B = 6$ i $C = 2$, dobija se:
$M_1(0,0) => A = 0, B = 6, C = 2$ i $\Delta = 36$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost,
$M_2(3,-9) => A = 36, B = 6, C = 2$ i $\Delta = -36$, pa je $M_2(3,-9)$ lokalni minimum i $z_{min} = -27$.

258. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6y$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 6y^2$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ i $M_2(-9,3)$. Kako je $A = 2, B = 6$ i $C = 12y$, dobija se:
$M_1(0,0) => A = 2, B = 6, C = 0$ i $\Delta = 36$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost,
$M_2(-9,3) => A = 2, B = 6, C = 36$ i $\Delta = -36$, pa je $M_2(-9,3)$ lokalni minimum i $z_{min} = -27$.

259. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y + 2$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x - 2y + 26$ => stacionarna tačka je $M(6,7)$.
Kako je $A = 2, B = -2$ i $C = -2$, dobija se:
$M(6,7) => A = 2, B = -2, C = -2$ i $\Delta = 8$, pa $M(6,7)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
Dakle, funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

260. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 19 - 2x - y$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 20 - x - 2y$ => stacionarna tačka je $M(6,7)$. Kako je $A = -2, B = -1$ i $C = -2$, dobija se:
$M(6,7) => A = -2, B = -1, C = -2$ i $\Delta = -3$, pa je $M(6,7)$ lokalni maximum i $z_{max} = 129$.

261. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{108}{x} - y^2$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + y^2$ => stacionarna tačka je $M(3,6)$. Kako je $A = -\frac{108}{x^2}, B = -2y$ i $C = -2x + 2y$, dobija se: $M(3,6) => A = -12, B = -12, C = 6$ i $\Delta = 216$, pa $M(3,6)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
Dakle, funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

262. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2\sqrt{y} - 8$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{y}} + 1$ => stacionarna tačka je $M(2,4)$. Kako je $A = 6, B = -\frac{1}{\sqrt{y}}$ i $C = \frac{x}{2\sqrt{y^3}}$, dobija se:
$M(2,4) => A = 6, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{8}$ i $\Delta = -\frac{1}{2}$, pa je $M(2,4)$ lokalni minimum i $z_{min} = -8$.

263. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{72} - \frac{y}{72} - \frac{1}{12}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2}{72} - \frac{x}{72}$ => stacionarne tačke su $M_1(4,-2)$ i $M_2(9,3)$. Kako je $A = \frac{1}{72}, B = -\frac{1}{72}$ i $C = \frac{y}{36}$, dobija se:

$M_1(4,-2) => A = \frac{1}{72}, B = -\frac{1}{72}$ i $C = -\frac{1}{18}$i $\Delta = \frac{5}{5184} > 0$, pa $M_1(4,-2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_2(9,3) => A = \frac{1}{72}, B = -\frac{1}{72}$ i $C = \frac{1}{12}$ i $\Delta = -\frac{5}{5184}$, pa je $M_2(9,3)$ lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{7}{16}$.

264. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2}{72} - \frac{y}{72}$ I $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{72} - \frac{x}{72} - \frac{1}{12}$ => stacionarne tačke su $M_1(-2,4)$ i $M_2(3,9)$. Kako je $A = \frac{x}{36}, B = -\frac{1}{72}$ i $C = \frac{1}{72}$, dobija se:

$M_1(-2,4) => A = -\frac{1}{18}, B = -\frac{1}{72}$ i $C = \frac{1}{72}$ i $\Delta = \frac{5}{5184} > 0$, pa $M_1(-2,4)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_2(3,9) => A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{72}$ i $C = \frac{1}{72}$ i $\Delta = -\frac{5}{5184}$, pa je $M_2(3,9)$ lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{7}{16}$.

265. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{y-x}(-x^2 - y^2 + 2x)$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y-x}(x^2 + y^2 + 2y)$ => stacionarne tačkesu $M_1(1,-1)$ i $M_2(0,0)$. Kako je $A = e^{y-x}(x^2 + y^2 - 4x + 2), B = e^{y-x}(-x^2 - y^2 + 2x - 2y)$ i $C = e^{y-x}(x^2 + y^2 + 4y + 2)$, dobija se:

$M_1(1,-1) => A = 0, B = \frac{2}{e^2}, C = 0$ i $\Delta = \frac{4}{e^4} > 0$, pa $M_1(1,-1)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_2(0,0) => A = 2, B = 0, C = 2$ i $\Delta = -4$, pa je $M_2(0,0)$ lokalni minimum i $z_{min} = 0$.

266. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{y-x}(2x^2 - y^2 - 4x)$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y-x}(y^2 - 2x^2 + 2y)$ => stacionarne tačkesu $M_1(-2,-4)$ i $M_2(0,0)$. Kako je $A = e^{y-x}(-2x^2 + y^2 + 8x - 4), B = e^{y-x}(2x^2 - y^2 - 4x - 2y)$ i $C = e^{y-x}(y^2 - 2x^2 + 4y + 2)$, dobija se:

$M_1(-2,-4) => A = \frac{-12}{e^2}, B = \frac{8}{e^2}, C = \frac{-6}{e^2}$ i $\Delta = \frac{-8}{e^4} > 0, A < 0$, pa je $M_1(-2,-4)$ lokalni maksimum i $z_{max} = \frac{8}{e^2}$.

$M_2(0,0) => A = -4, B = 0, C = 2$ i $\Delta = 0$, pa $M_2(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

267. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - e^x$i $\frac{\partial z}{\partial y} = 2e^2 - 2e^{2y}$ => stacionarna tačka je $M(0,1)$. Kako je $A = -e^x, B = 0$ i $C = -4e^{2y}$, dobija se:

$M(0,1) => A = -1, B = 0, C = -4e^2$ i $\Delta = -4e^2$, pa je $M(0,1)$ lokalni maksimum i $z_{max} = e^2 - 1$.

268. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}y^2e^x - e^{3x} - 3xe^{3x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x - y^2$ => stacionarne tačkesu $M_1\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ i $M_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right)$. Kako je $A = \frac{1}{2}y^2e^x - 6e^{3x} - 9xe^{3x}, B = ye^x$ i $C = e^x - 2y$, dobija se:

$M_1\left(-\frac{1}{3}, 0\right) => A = -\frac{3}{e}, B = 0, C = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$i $\Delta = \frac{3}{e\sqrt[3]{e}} > 0$, pa $M_1\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right) => A = -\frac{4}{\sqrt{e}}, B = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, C = -\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$i $\Delta = -\frac{3}{\sqrt[3]{e^2}}$, pa je $M_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right)$ lokalni maksimum i $z_{max} = \frac{1}{3\sqrt{e}}$. .

269. Kako je $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2e^y - e^{3y} - 3ye^{3y}$ i $\frac{\partial z}{\partial x} = xe^y - x^2$ => stacionarne tačkesu $M_1\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ i $M_2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}, -\frac{1}{6}\right)$. Kako je $C = \frac{1}{2}x^2e^y - 6e^{3y} - 9ye^{3y}, B = xe^y$ i $A = e^y - 2x$, dobija se:

$M_1\left(0, -\frac{1}{3}\right) => C = -\frac{3}{e}, B = 0, A = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$i $\Delta = \frac{3}{e\sqrt[3]{e}} > 0$, pa M_1 $M_1\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}, -\frac{1}{6}\right) => C = -\frac{4}{\sqrt{e}}, B = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, A = -\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$i $\Delta = -\frac{3}{\sqrt[3]{e^2}}$, pa je $M_2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}, -\frac{1}{6}\right)$ lokalni maksimum i $z_{max} = \frac{1}{3\sqrt{e}}$. .

270. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{36}{x^2}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{48}{y^2}$ => stacionarna tačka je $M(3,4)$. Kako je $A = \frac{72}{x^3}, B = 1$ i $C = \frac{96}{y^3}$, dobija se:

$M(3,4) => A = \frac{8}{3}, B = 1, C = \frac{3}{2}$ i $\Delta = -3$, pa je $M(3,4)$ lokalni minimum i $z_{min} = 36$.

271. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{48}{x^2}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{36}{y^2}$ => stacionarna tačka je $M(4,3)$. Kako je $A = \frac{96}{x^3}, B = 1$ i $C = \frac{72}{y^3}$, dobija se:

$M(4,3) => A = \frac{3}{2}, B = 1, C = \frac{8}{3}$ i $\Delta = -3$, pa je $M(4,3)$ lokalni minimum i $z_{min} = 36$.

272. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{36}{x^2} + 1$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{64}{y^2} + 1$ => stacionarne tačke su $M_1(6,8), M_2(6,-8), M_3(-6,8)$i $M_4(-6,-8)$. Kako je $A = \frac{72}{x^3}, B = 0$ i $C = \frac{128}{y^3}$, dobija se:

$M_1(6,8) => A = \frac{1}{3}, B = 0, C = \frac{1}{4}$ i $\Delta = -\frac{1}{12}$, pa je $M_1(6,8)$ lokalni minimum i $z_{min} = 29$.

$M_2(6,-8) => A = \frac{1}{3}, B = 0, C = -\frac{1}{4}$ i $\Delta = \frac{1}{12}$, pa $M_2(6,-8)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_3(-6,8) => A = -\frac{1}{3}, B = 0, C = \frac{1}{4}$ i $\Delta = \frac{1}{12}$, pa $M_3(-6,8)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_4(-6,-8) => A = -\frac{1}{3}, B = 0, C = -\frac{1}{4}$ i $\Delta = -\frac{1}{12}$, pa je $M_4(-6,-8)$ lokalni maksimum i $z_{max} = -27$.

273. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{49}{x^2} + 1$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{81}{y^2} + 1$ => stacionarne tačke su $M_1(7,9), M_2(7,-9), M_3(-7,9)$i $M_4(-7,-9)$. Kako je $A = \frac{98}{x^3}, B = 0$ i $C = \frac{162}{y^3}$, dobija se:

$M_1(7,9) => A = \frac{2}{7}, B = 0, C = \frac{2}{9}$ i $\Delta = -\frac{4}{63}$, pa je $M_1(7,9)$ lokalni minimum i $z_{min} = 33$.

$M_2(7,-9) => A = \frac{2}{7}, B = 0, C = -\frac{2}{9}$ i $\Delta = \frac{4}{63}$, pa $M_2(7,-9)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_3(-7,9) => A = -\frac{2}{7}, B = 0, C = \frac{2}{9}$ i $\Delta = \frac{4}{63}$, pa $M_3(-7,9)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

$M_4(-7,-9) => A = -\frac{2}{7}, B = 0, C = -\frac{2}{9}$ i $\Delta = -\frac{4}{63}$, pa je $M_4(-7,-9)$ lokalni maksimum i $z_{max} = -31$.

274. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{252}{x^2}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{294}{y^2}$ => stacionarna tačka je $M(6,7)$. Kako je $A = \frac{504}{x^3}, B = 1$ i $C = \frac{588}{y^3}$, dobija se:

$M(6,7) => A = \frac{7}{3}, B = 1, C = \frac{12}{7}$ i $\Delta = -3$, pa je $M(6,7)$ lokalni minimum i $z_{min} = 126$.

275. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{294}{x^2}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{252}{y^2}$ => stacionarna tačka je $M(7,6)$. Kako je $A = \frac{588}{x^3}, B = 1$ i $C = \frac{504}{y^3}$, dobija se:

$M(7,6) => A = \frac{12}{7}, B = 1, C = \frac{7}{3}$ i $\Delta = -3$, pa je $M(7,6)$ lokalni minimum i $z_{min} = 126$.

276. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 12y - 2xy - y^2$i $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x - x^2 - 2xy$ => stacionarne tačke su $M_1(0,0), M_2(12,0), M_3(0,12)$i $M_4(4,4)$. Kako je $A = -2y, B = 12 - 2x - 2y$ i $C = -2x$, dobija se:
$M_1(0,0)$ => $A = 0, B = 12, C = 0$ i $\Delta = 144$, pa $M_1(0,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_2(12,0)$ => $A = 0, B = -12, C = -24$ i $\Delta = 144$, pa $M_2(12,0)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_3(0,12)$ => $A = -24, B = -12, C = 0$ i $\Delta = 144$, pa $M_3(0,12)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_4(4,4)$ => $A = -8, B = -4, C = -8$ i $\Delta = -48$, pa je $M_4(4,4)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 64$.

277. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12$ => stacionarne tačkesu $M_1(2,1), M_2(-2,-1), M_3(1,2)$i $M_4(-1,-2)$. Kako je $A = 6x, B = 6y$ i $C = 6x$, dobija se:
$M_1(2,1)$ => $A = 12, B = 6, C = 12$ i $\Delta = -108$, pa je $M_1(2,1)$ lokalni minimum i $z_{min} = -28$.
$M_2(-2,-1)$ => $A = -12, B = -6, C = -12$ i $\Delta = -108$, pa je $M_2(-2,-1)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 28$.
$M_3(1,2)$ => $A = 6, B = 12, C = 6$ i $\Delta = 108$, pa $M_3(1,2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_4(-1,-2)$ => $A = -6, B = -12, C = -6$ i $\Delta = 108$, pa $M_4(-1,-2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

278. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - y - 11$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y$ => stacionarne tačke su $M_1(2,1)$i $M_2\left(-\frac{11}{6}, -\frac{11}{12}\right)$. Kako je $A = 6x, B = -1$ i $C = 2$, dobija se:
$M_1(2,1)$ => $A = 12, B = -1, C = 2$ i $\Delta = -23$, pa je $M_1(2,1)$ lokalni minimum i $z_{min} = -12$.
$M_2\left(-\frac{11}{6}, -\frac{11}{12}\right)$ => $A = -11, B = -1, C = 2$ i $\Delta = 23$, pa $M_2\left(-\frac{11}{6}, -\frac{11}{12}\right)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

279. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 3y^2 - 11$ => stacionarne tačke su $M_1(1,2)$i $M_2\left(-\frac{11}{12}, -\frac{11}{6}\right)$. Kako je $A = 2, B = -1$ i $C = 6y$, dobija se:
$M_1(1,2)$ => $A = 2, B = -1, C = 12$ i $\Delta = -23$, pa je $M_1(1,2)$ lokalni minimum i $z_{min} = -12$.
$M_2\left(-\frac{11}{12}, -\frac{11}{6}\right)$ => $A = 2, B = -1, C = -11$ i $\Delta = 23$, pa $M_2\left(-\frac{11}{12}, -\frac{11}{6}\right)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

280. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - x$ => stacionarne tačke su $M_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$i $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Kako je $A = 2, B = -1$ i $C = 6y$, dobija se:
$M_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ => $A = 2, B = -1, C = 3$ i $\Delta = -5$, pa je $M_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{7}{16}$.
$M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ => $A = 2, B = -1, C = -2$ i $\Delta = 5$, pa $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

281. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 36$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 39$ => stacionarne tačke su $M_1(2,3), M_2(-2,-3), M_3(3,2)$i $M_4(-3,-2)$. Kako je $A = 6y, B = 6x$ i $C = 6y$, dobija se:
$M_1(2,3)$ => $A = 18, B = 12, C = 18$ i $\Delta = -180$, pa je $M_1(2,3)$ lokalni minimum i $z_{min} = -100$.
$M_2(-2,-3)$ => $A = -18, B = -12, C = -18$ i $\Delta = -180$, pa je $M_2(-2,-3)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 152$.
$M_3(3,2)$ => $A = 12, B = 18, C = 12$ i $\Delta = 180$, pa $M_3(3,2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_4(-3,-2)$ => $A = -12, B = -18, C = -12$ i $\Delta = 180$, pa $M_4(-3,-2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

282. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 20$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 19$ => stacionarna tačka je$M(7,6)$. Kako je $A = 2, B = 1$ i $C = 2$, dobija se:
$M(7,6)$ => $A = 2, B = 1, C = 2$ i $\Delta = -3$, pa je $M(7,6)$ lokalni minimum i $z_{min} = -126$.

283. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2}$i $\frac{\partial z}{\partial y} = -1 + \frac{4}{y^2}$ => stacionarne tačke su $M_1(1,2), M_2(1,-2), M_3(-1,2)$i $M_4(-1,-2)$. Kako je $A = \frac{2}{x^3}, B = 0$ i $C = \frac{-8}{y^3}$, dobija se:
$M_1(1,2)$ => $A = 2, B = 0, C = -1$ i $\Delta = 2$, pa $M_1(1,2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_2(1,-2)$ => $A = 2, B = 0, C = 1$ i $\Delta = -2$, pa je $M_2(1,-2)$ lokalni minimum i $z_{min} = 6$.
$M_3(-1,2)$ => $A = -2, B = 0, C = -1$ i $\Delta = -2$, pa je $M_3(-1,2)$ lokalni maksimum i $z_{max} = -6$.
$M_4(-1,-2)$ => $A = -2, B = 0, C = 1$ i $\Delta = 2$, pa $M_4(-1,-2)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

284. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = -1 + \frac{4}{x^2}$i $\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$ => stacionarne tačke su $M_1(2,1), M_2(2,-1), M_3(-2,1)$i $M_4(-2,-1)$. Kako je $A = \frac{-8}{x^3}, B = 0$ i $C = \frac{2}{y^3}$, dobija se:
$M_1(2,1)$ => $A = -1, B = 0, C = 2$ i $\Delta = 2$, pa $M_1(2,1)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_2(2,-1)$ => $A = -1, B = 0, C = -2$ i $\Delta = -2$, pa je $M_2(2,-1)$ lokalni minimum i $z_{min} = 6$.
$M_3(-2,1)$ => $A = 1, B = 0, C = 2$ i $\Delta = -2$, pa je $M_3(-2,1)$ lokalni maksimum i $z_{max} = -6$.
$M_4(-2,-1)$ => $A = 1, B = 0, C = -2$ i $\Delta = 2$, pa $M_4(-2,-1)$ nije lokalna ekstremna vrednost.

285. Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = 6(x^2 - 7x + 12)$i $\frac{\partial z}{\partial y} = 6(y^2 - 3y + 2)$ => stacionarne tačke su $M_1(3,1), M_2(3,2), M_3(4,1)$i $M_4(4,2)$. Kako je $A = 6(2x - 7), B = 0$ i $C = 6(2y - 3)$, dobija se:
$M_1(3,1)$ => $A = -6, B = 0, C = -6$ i $\Delta = -36$, pa je $M_1(3,1)$ lokalni maksimum i $z_{max} = 87$.
$M_2(3,2)$ => $A = -6, B = 0, C = 6$ i $\Delta = 36$, pa $M_2(3,2)$ nije lokalna ekstremna vrednost
$M_3(4,1)$ => $A = 6, B = 0, C = -6$ i $\Delta = 36$, pa $M_3(4,1)$ nije lokalna ekstremna vrednost.
$M_4(4,2)$ => $A = 6, B = 0, C = 6$ i $\Delta = -36$, pa je $M_4(4,2)$ lokalni minimum i $z_{min} = 85$.

286. Iz uslova => $y = x - 6$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 3x^2 - 24x + 36$. Kako je $z' = 6(x - 4)$ => tačka $M(4,-2)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -12$.

287. Iz uslova => $y = x - 3$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 3x^2 - 12x + 9$. Kako je $z' = 6(x - 2)$ => tačka $M(2,-1)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -3$.

288. Iz uslova => $y = x + 6$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 2x^2 + 6x$. Kako je $z' = 2(2x + 3)$ => tačka $M\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{9}{2}$.
289. Iz uslova => $y = 3 - 2x$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 3x^2 - 2x^3$. Kako je $z' = 6x(1 - x)$ => tačka $M_1(0,3)$ je lokalni minimum i $z_{min} = 0$, a tačka $M_2(1,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 1$.
290. Iz uslova => $x = \frac{1}{y^2}$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = \frac{1}{y^2} + 2y - 3$. Kako je $z' = \frac{-2}{y^3} + 2$ => tačka $M(1,1)$ je lokalni minimum i $z_{min} = 0$.
291. Iz uslova => $y = x - 8$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 2x^2 - 6x - 16$. Kako je $z' = 2(2x - 3)$ => tačka $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -\frac{41}{2}$.
292. Iz uslova => $x = 2y + 4$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = \frac{1}{2}y^2 + y + 2$. Kako je $z' = y + 1$ => tačka $M(2, -1)$ je lokalni minimum i $z_{min} = \frac{3}{2}$.
293. Iz uslova => $y = x - 4$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 2x^2 - 4x + 2$. Kako je $z' = 4(x - 1)$ => tačka $M(1, -3)$ je lokalni minimum i $z_{min} = 0$.
294. Iz uslova => $x = y + 2$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 2y^2 + 4y + 4$. Kako je $z' = 4y + 4$ => tačka $M(1, -1)$ je lokalni minimum i $z_{min} = 2$.
295. Iz uslova => $y = 12.500.000 - 625.000x$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = \sqrt{12.500.000x - 625.000x^2}$. Kako je $z' = \frac{12.500.000 - 1.250.000x}{2\sqrt{12.500.000x - 625.000x^2}}$ => tačka $M(10; 6.250.000)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 2500\sqrt{10}$.
296. Iz uslova => $y = 2x + 3$, pa ako to zamenimo u početnu funkciju, dobija se $z = 2x^2 + 12x + 9$. Kako je $z' = 4x + 12$ => tačka $M(-3, -3)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -9$.
297. Kako je $F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + 4y^2 - 8)$ => $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 8\lambda y, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 8$ => stacionarne tačke su $M_1(2,1), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ i $M_2(-2, -1), \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 8\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 8ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(2,1), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ => $d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 - 2dy^2 < 0$ => $M_1(2,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 4$.
$M_2(-2, -1), \lambda_2 = \frac{1}{4}$ => $d^2F = \frac{1}{2}dx^2 + 2dy^2 > 0$ => $M_2(-2, -1)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -4$.
298. Kako je $F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 20)$ => $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 20$ => stacionarne tačke su $M_1(2,4), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ i $M_2(-2, -4), \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(2,4), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ => $d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{2}dy^2 < 0$ => $M_1(2,4)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 10$.
$M_2(-2, -4), \lambda_2 = \frac{1}{4}$ => $d^2F = \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2 > 0$ => $M_2(-2, -4)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -10$.
299. Kako je $F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 20)$ => $\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 20$ => stacionarne tačke su $M_1(4,2), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ i $M_2(-4, -2), \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(4,2), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ => $d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{2}dy^2 < 0$ => $M_1(4,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 10$.
$M_2(-4, -2), \lambda_2 = \frac{1}{4}$ => $d^2F = \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2 > 0$ => $M_2(-4, -2)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -10$.
300. Kako je $F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(4x^2 + y^2 - 8)$ => $\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 8\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 4x^2 + y^2 - 8$ => stacionarne tačke su $M_1(1,2), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ i $M_2(-1, -2), \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Kako je $d^2F = 8\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $8xdx + 2ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(1,2), \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ => $d^2F = -2dx^2 - \frac{1}{2}dy^2 < 0$ => $M_1(1,2)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 4$.
$M_2(-1, -2), \lambda_2 = \frac{1}{4}$ => $d^2F = 2dx^2 + \frac{1}{2}dy^2 > 0$ => $M_2(-1, -2)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -4$.
301. Kako je $F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ => $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5$ => stacionarne tačke su $M_1(1,2), \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ i $M_2(-1, -2), \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(1,2), \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ => $d^2F = -dx^2 - dy^2 < 0$ => $M_1(1,2)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 5$.
$M_2(-1, -2), \lambda_2 = \frac{1}{2}$ => $d^2F = dx^2 + dy^2 > 0$ => $M_2(-1, -2)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -5$.
302. Kako je $F(x, y, \lambda) = x + 3y + \lambda(x^2 + 9y^2 - 18)$ => $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 18\lambda y,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + 9y^2 - 18$ => stacionarne tačke su $M_1(3,1), \lambda_1 = -\frac{1}{6}$ i $M_2(-3, -1), \lambda_2 = \frac{1}{6}$. Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 18\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 18ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(3,1), \lambda_1 = -\frac{1}{6}$ => $d^2F = -\frac{1}{3}dx^2 - 3dy^2 < 0$ => $M_1(3,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 6$.
$M_2(-3, -1), \lambda_2 = \frac{1}{6}$ => $d^2F = \frac{1}{3}dx^2 + 3dy^2 > 0$ => $M_2(-3, -1)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -6$.

303. Kako je $F(x,y,\lambda)=3x+y+\lambda(9x^2+y^2-18) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=1+18\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=9x^2+y^2-18 \Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(1,3),\lambda_1=-\frac{1}{6}$ i $M_2(-1,-3),\lambda_2=\frac{1}{6}$. Kako je $d^2F=18\lambda dx^2+2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $18xdx+2ydy=0$, dobijamo:
$M_1(1,3),\lambda_1=-\frac{1}{6} \Rightarrow d^2F=-3dx^2-\frac{1}{3}dy^2<0 \Rightarrow M_1(1,3)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=6$.
$M_2(-1,-3),\lambda_2=\frac{1}{6} \Rightarrow d^2F=3dx^2+\frac{1}{3}dy^2>0 \Rightarrow M_2(-1,-3)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-6$.

304. Kako je $F(x,y,\lambda)=2x+3y+\lambda(4x^2+9y^2-72) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=2+8\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=3+18\lambda y,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=4x^2+9y^2-72 \Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(3,2),\lambda_1=-\frac{1}{12}$ i $M_2(-3,-2),\lambda_2=\frac{1}{12}$. Kako je $d^2F=8\lambda dx^2+18\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $8xdx+18ydy=0$, dobijamo:
$M_1(3,2),\lambda_1=-\frac{1}{12} \Rightarrow d^2F=-\frac{2}{3}dx^2-\frac{3}{2}dy^2<0 \Rightarrow M_1(3,2)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=12$.
$M_2(-3,-2),\lambda_2=\frac{1}{12} \Rightarrow d^2F=\frac{2}{3}dx^2+\frac{3}{2}dy^2>0 \Rightarrow M_2(-3,-2)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-12$.

305. Kako je $F(x,y,\lambda)=4x+y+\lambda(16x^2+y^2-32) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=4+32\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda y,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=16x^2+y^2-32 \Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(1,4),\lambda_1=-\frac{1}{8}$ i $M_2(-1,-4),\lambda_2=\frac{1}{8}$. Kako je $d^2F=32\lambda dx^2+2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $32xdx+2ydy=0$, dobijamo:
$M_1(1,4),\lambda_1=-\frac{1}{8} \Rightarrow d^2F=-4dx^2-\frac{1}{4}dy^2<0 \Rightarrow M_1(1,4)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=8$.
$M_2(-1,-4),\lambda_2=\frac{1}{8} \Rightarrow d^2F=4dx^2+\frac{1}{4}dy^2>0 \Rightarrow M_2(-1,-4)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-8$ . .

306. Kako je $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y,$
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2 \Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(1,1),\lambda_1=-\frac{1}{2},M_2(-1,-1),\lambda_2=-\frac{1}{2},M_3(1,-1),\lambda_3=\frac{1}{2}$ i $M_4(-1,1),\lambda_4=\frac{1}{2}$.
Kako je $d^2F=2\lambda dx^2+2dxdy+2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx+2ydy=0$,dobijamo:
$M_1(1,1),\lambda_1=-\frac{1}{2} \Rightarrow d^2F=-dx^2+2dxdy-dy^2$ i $dx=-dy \Rightarrow d^2F=-4dx^2<0 \Rightarrow M_1(1,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=1$.
$M_2(-1,-1),\lambda_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow d^2F=-dx^2+2dxdy-dy^2$ i $dx=-dy \Rightarrow d^2F=-4dx^2<0 \Rightarrow M_1(1,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=1$.
$M_3(1,-1),\lambda_3=\frac{1}{2} \Rightarrow d^2F=dx^2+2dxdy+dy^2$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=4dx^2>0 \Rightarrow M_3(1,-1)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-1$.
$M_4(-1,1),\lambda_4=\frac{1}{2} \Rightarrow d^2F=dx^2+2dxdy+dy^2$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=4dx^2>0 \Rightarrow M_4(-1,1)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-1$.

307. Kako je $F(x,y,\lambda)=xy^2+\lambda(x^2+y^2-27) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=y^2+2\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2xy+2\lambda y,$
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-27 \Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(3\sqrt{3},0),\lambda_1=0,M_2(-3\sqrt{3},0),\lambda_2=0,M_3(3,-3),\lambda_3=-3,M_4(3,3),\lambda_4=-3,M_5(-3,3),\lambda_5=3$ i $M_6(-3,-3),\lambda_6=3$. Kako je $d^2F=2\lambda dx^2+4ydxdy+(2x+2\lambda)dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx+2ydy=0$,dobijamo:
$M_1(3\sqrt{3},0),\lambda_1=0 \Rightarrow d^2F=6\sqrt{3}dy^2>0 \Rightarrow M_1(3\sqrt{3},0)$ je lokalni minimum i $z_{min}=0$.
$M_2(-3\sqrt{3},0),\lambda_2=0 \Rightarrow d^2F=-6\sqrt{3}dy^2<0 \Rightarrow M_2(-3\sqrt{3},0)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=0$.
$M_3(3,-3),\lambda_3=-3 \Rightarrow d^2F=-6dx^2-24dxdy$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=-30dx^2<0 \Rightarrow M_3(3,-3)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=27$.
$M_5(-3,3),\lambda_5=3 \Rightarrow d^2F=6dx^2+24dxdy$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=30dx^2>0 \Rightarrow M_5(-3,3)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-27$.
$M_6(3,-3),\lambda_6=-3 \Rightarrow d^2F=-6dx^2-24dxdy$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=-30dx^2<0 \Rightarrow M_6(3,-3)$ je lokalni maksimum i $z_{maks}=27$.

308. Kako je $F(x,y,\lambda)=3xy+2+\lambda(x^2+y^2-32) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=3y+2\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=3x+2\lambda y,$
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-32 \Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(4,4),\lambda_1=-\frac{3}{2},M_2(-4,-4),\lambda_2=-\frac{3}{2},M_3(4,-4),\lambda_3=\frac{3}{2}$ i $M_4(-4,4),\lambda_4=\frac{3}{2}$.
Kako je $d^2F=2\lambda dx^2+6dxdy+2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx+2ydy=0$,dobijamo:
$M_1(4,4),\lambda_1=-\frac{3}{2} \Rightarrow d^2F=-3dx^2+6dxdy-3dy^2$ i $dx=-dy \Rightarrow d^2F=-12dx^2<0 \Rightarrow M_1(4,4)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=50$.
$M_2(-4,-4),\lambda_2=-\frac{3}{2} \Rightarrow d^2F=-3dx^2+6dxdy-3dy^2$ i $dx=-dy \Rightarrow d^2F=-12dx^2<0 \Rightarrow M_2(-4,-4)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=50$.
$M_3(4,-4),\lambda_3=\frac{3}{2} \Rightarrow 3dx^2+6dxdy+3dy^2$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=12dx^2>0 \Rightarrow M_3(4,-4)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-46$.
$M_4(-4,4),\lambda_4=\frac{3}{2} \Rightarrow 3dx^2+6dxdy+3dy^2$ i $dx=dy \Rightarrow d^2F=12dx^2>0 \Rightarrow M_4(-4,4)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-46$.

309. Kako je $F(x,y,\lambda) = 4xy + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 18) => \frac{\partial F}{\partial x} = 4y + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4x + 2\lambda y$,
$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 18$ =>stacionarne tačke su $M_1(3,3), \lambda_1 = -2, M_2(-3,-3), \lambda_2 = -2, M_3(3,-3), \lambda_3 = 2$ i $M_4(-3,3), \lambda_4 = 2$.
Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 8dxdy + 2\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$,dobijamo:
$M_1(3,3), \lambda_1 = -2 => d^2F = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$ i $dx = -dy => d^2F = -16dx^2 < 0 => M_1(3,3)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 39$.
$M_2(-3,-3), \lambda_2 = -2 => d^2F = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$ i $dx = -dy => d^2F = -16dx^2 < 0 => M_2(-3,-3)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 39$.
$M_3(3,-3), \lambda_3 = 2 => 4dx^2 + 8dxdy + 4dy^2$ i $dx = dy => d^2F = 16dx^2 > 0 => M_3(3,-2)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -33$.
$M_4(-3,3), \lambda_4 = 2 => 4dx^2 + 8dxdy + 4dy^2$ i $dx = dy => d^2F = 16dx^2 > 0 => M_4(-3,3)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -33$.

310. Kako je $F(x,y,\lambda) = x - y + \lambda(x^2 - y^2 - 2) => \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -1 - 2\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - y^2 - 2$ => nema stacionarnih tačaka, pa funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti.

311. Kako je $F(x,y,\lambda) = x + \lambda(x^2 + 2y^2 - 3) => \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - 3$ => stacionarne tačke su
$M_1(\sqrt{3},0), \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ i $M_2(-\sqrt{3},0), \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 4\lambda dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 4ydy = 0$, dobijamo:
$M_1(\sqrt{3},0), \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} => d^2F = -\frac{\sqrt{3}}{3}dx^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}dy^2 < 0 => M_1(\sqrt{3},0)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = \sqrt{3}$.
$M_2(-\sqrt{3},0), \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} => d^2F = \frac{\sqrt{3}}{3}dx^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}dy^2 > 0 => M_2(-\sqrt{3},0)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -\sqrt{3}$.

312. Kako je $F(x,y,\lambda) = (x-y)^3 + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 8) => \frac{\partial F}{\partial x} = 3(x-y)^2 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3(x-y)^2 + 2\lambda y$,
$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8$ =>stacionarne tačke su $M_1(2,2), \lambda_1 = 0, M_2(2,-2), \lambda_2 = -12, M_3(-2,2), \lambda_3 = 12$ i $M_4(-2,-2), \lambda_4 = 0$.
Kako je $d^2F = [6(x-y) + 2\lambda]dx^2 - 12(x-y)dxdy + [6(x-y) + 2\lambda]dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$,dobijamo:
$M_1(2,2), \lambda_1 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_2(2,-2), \lambda_2 = -12 => d^2F = -48dxdy$ i $dx = dy => d^2F = -48dy^2 < 0 => M_2(2,-2)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 65$.
$M_3(-2,2), \lambda_3 = 12 => d^2F = 48dxdy$ i $dx = dy => d^2F = 48dy^2 > 0 => M_3(-2,2)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -63$.
$M_4(-2,-2), \lambda_4 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.

313. Kako je $F(x,y,\lambda) = (y-x)^3 + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 18) => \frac{\partial F}{\partial x} = -3(y-x)^2 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3(y-x)^2 + 2\lambda y$,
$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 18$ =>stacionarne tačke su $M_1(3,3), \lambda_1 = 0, M_2(3,-3), \lambda_2 = 18, M_3(-3,3), \lambda_3 = -18$ i $M_4(-3,-3), \lambda_4 = 0$.
Kako je $d^2F = [6(y-x) + 2\lambda]dx^2 - 12(y-x)dxdy + [6(y-x) + 2\lambda]dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je *2xdx+2ydy=0*,dobijamo:
$M_1(3,3), \lambda_1 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_2(3,-3), \lambda_2 = 18 => d^2F = 72dxdy$ i $dx = dy => d^2F = 72dy^2 > 0 => M_2(3,-3)$ je lokalni minimum i $z_{min} = -215$.
$M_3(-3,3), \lambda_3 = -18 => d^2F = -72dxdy$ i $dx = dy => d^2F = -72dy^2 < 0 => M_3(-3,3)$ je lokalni maks. i $z_{max} = 217$.
$M_4(-3,-3), \lambda_4 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.

314. Kako je $F(x,y,\lambda) = (y-x)^4 + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 18) => \frac{\partial F}{\partial x} = -4(y-x)^3 + 2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 4(y-x)^3 + 2\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 18$ => stacionarne tačke su $M_1(3,3), \lambda_1 = 0, M_2(3,-3), \lambda_2 = -144, M_3(-3,3), \lambda_3 = -144$ i $M_4(-3,-3), \lambda_4 = 0$. Kako je $d^2F = [12(y-x)^2 + 2\lambda]dx^2 - 24(y-x)^2dxdy + [12(y-x)^2 + 2\lambda]dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$,dobijamo:
$M_1(3,3), \lambda_1 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_2(3,-3), \lambda_2 = -144 => d^2F = 144dx^2 - 864dxdy + 144dy^2$ i $dx = dy => d^2F = -576dy^2 < 0 => M_2(3,-3)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 1297$.
$M_3(-3,3), \lambda_3 = -144 => d^2F = 144dx^2 - 864dxdy + 144dy^2$ i $dx = dy => d^2F = -576dy^2 < 0 => M_3(-3,3)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 1297$.
$M_4(-3,-3), \lambda_4 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.

315. Kako je $F(x,y,\lambda) = (y-x)^4 + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 8) => \frac{\partial F}{\partial x} = -4(y-x)^3 + 2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y} = 4(y-x)^3 + 2\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8$ => stacionarne tačke su $M_1(2,2), \lambda_1 = 0, M_2(2,-2), \lambda_2 = -64, M_3(-2,2), \lambda_3 = -64$ i $M_4(-2,-2), \lambda_4 = 0$. Kako je $d^2F = [12(y-x)^2 + 2\lambda]dx^2 - 24(y-x)^2dxdy + [12(y-x)^2 + 2\lambda]dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx + 2ydy = 0$,dobijamo:
$M_1(2,2), \lambda_1 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_2(2,-2), \lambda_2 = -64 => d^2F = 64dx^2 - 384dxdy + 64dy^2$ i $dx = dy => d^2F = -256dy^2 < 0 => M_2(2,-2)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 257$.
$M_3(-2,2), \lambda_3 = -64 => d^2F = 64dx^2 - 384dxdy + 64dy^2$ i $dx = dy => d^2F = -256dy^2 < 0 => M_3(-2,2)$ je lokalni maksimum i $z_{max} = 257$.
$M_4(-2,-2), \lambda_4 = 0 => d^2F = 0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.

316. Kako je $F(x,y,\lambda)=(x-y)^4+1+\lambda(x^2+y^2-2) => \frac{\partial F}{\partial x}=4(x-y)^3+2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y}=-4(x-y)^3+2\lambda y$,
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2$ =>stacionarne tačke su $M_1(1,1), \lambda_1=0, M_2(1,-1), \lambda_2=-16, M_3(-1,1), \lambda_3=-16$ i $M_4(-1,-1), \lambda_4=0$.
Kako je $d^2F=[12(x-y)^2+2\lambda]dx^2-24(x-y)^2dxdy+[12(x-y)^2+2\lambda]dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx+2ydy=0$, dobijamo:
$M_1(1,1), \lambda_1=0 => d^2F=0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.
$M_2(1,-1), \lambda_2=-16 => d^2F=16dx^2-96dxdy+16dy^2$ i $dx=dy => d^2F=-64dy^2<0 => M_2(1,-1)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=17$.
$M_3(-1,1), \lambda_3=-16 => d^2F=16dx^2-96dxdy+16dy^2$ i $dx=dy => d^2F=-64dy^2<0 => M_3(-1,1)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=17$.
$M_4(-1,-1), \lambda_4=0 => d^2F=0$, pa problem ekstrema ostaje nerešen.

317. Kako je $F(x,y,\lambda)=x^2+8xy+2y^2+\lambda(x^2+y^2-10) => \frac{\partial F}{\partial x}=2x+8y+2\lambda x, \frac{\partial F}{\partial y}=8x+4y+2\lambda y$,
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-10$ =>stacionarne tačke su $M_1(\sqrt{2},-2\sqrt{2}), \lambda_1=0, M_2(-\sqrt{2},2\sqrt{2}), \lambda_2=0, M_3(2\sqrt{2},\sqrt{2}), \lambda_3=-10$ i $M_4(-2\sqrt{2},-\sqrt{2}), \lambda_4=-10$. Kako je $d^2F=[16+2\lambda]dx^2+16dxdy+[4+2\lambda]dy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $2xdx+2ydy=0$, dobijamo:
$M_1(\sqrt{2},-2\sqrt{2}), \lambda_1=0 => d^2F=16dx^2+16dxdy+4dy^2$ i $dx=2dy => d^2F=100dy^2>0 => M_1(\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ je lokalni minimum i $z_{min}=0$.
$M_2(-\sqrt{2},2\sqrt{2}), \lambda_2=0 => d^2F=16dx^2+16dxdy+4dy^2$ i $dx=2dy => d^2F=100dy^2>0 => M_2(-\sqrt{2},2\sqrt{2})$ je lokalni minimum i $z_{min}=0$.
$M_3(2\sqrt{2},\sqrt{2}), \lambda_3=-10 => d^2F=-4dx^2+16dxdy-16dy^2$ i $dy=-2dx => d^2F=-100dx^2<0 => M_3(2\sqrt{2},\sqrt{2})$ je lokalni maksimum i $z_{max}=100$.
$M_4(-2\sqrt{2},-\sqrt{2}), \lambda_4=-10 => d^2F=-4dx^2+16dxdy-16dy^2$ i $dy=-2dx => d^2F=-100dx^2<0 =>$ $M_4(-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$ je lokalni maksimum i $z_{max}=100$.

318. ??? Ako neko zna da reši zadatak neka pošalje rešenje

319. ??? Ako neko zna da reši zadatak neka pošalje rešenje

320. Kako je $F(x,y,\lambda)=y-x+4+\lambda(xy^2-x^2y+2) => \frac{\partial F}{\partial x}=-1+\lambda y^2-2x\lambda y, \ \frac{\partial F}{\partial y}=1+2\lambda xy-x^2\lambda$,
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=xy^2-x^2y+2$ =>stacionarna tačka je $M_1(-1,1), \lambda_1=\frac{1}{3}$. Kako je $d^2F=-2\lambda ydx^2+(4\lambda y-4\lambda x)dxdy+2\lambda xdy^2$, a uslov koji vezuje dx i dy je $(y^2-2xy)dx+(2xy-x^2)dy=0$, dobijamo:
$M_1(-1,1), \lambda_1=\frac{1}{3} => d^2F=-\frac{2}{3}dx^2+\frac{8}{3}dxdy-\frac{2}{3}dy^2$ i $dx=dy => d^2F=\frac{4}{3}dy^2>0 => M_1(-1,1)$ je lokalni minimum i $z_{min}=6$.

321. Uvođenjem smene $u=\frac{1}{x}$ i $v=\frac{1}{y}$, funkcija se svodi na $z=u+v$, a uslov je $18u^2+18v^2=1$. Kako je $F(u,v,\lambda)=u+v+\lambda(18u^2+18v^2-1) => \frac{\partial F}{\partial u}=1+36\lambda u, \frac{\partial F}{\partial v}=1+36\lambda v, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=18u^2+18v^2-1 =>$
stacionarne tačke su $M_1\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right), \lambda_1=-\frac{1}{6}$ i $M_2\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right), \lambda_2=\frac{1}{6}$. Kako je $d^2F=36\lambda du^2+36\lambda dv^2$, a uslov koji vezuje du i dv je $36udu+36vdv=0$, dobijamo:
$M_1\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right), \lambda_1=-\frac{1}{6} => d^2F=-6du^2-6dv^2<0 => M_1(6,6)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=\frac{1}{3}$.
$M_2\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right), \lambda_2=\frac{1}{6} => d^2F=6du^2+6dv^2>0 => M_2(-6,-6)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-\frac{1}{3}$.

322. Uvođenjem smene $u=\frac{1}{x}$ i $v=\frac{1}{y}$, funkcija se svodi na $z=u+v$, a uslov je $2u^2+2v^2=1$.Kako je $F(u,v,\lambda)=u+v+\lambda(2u^2+2v^2-1) => \frac{\partial F}{\partial u}=1+4\lambda u, \frac{\partial F}{\partial v}=1+4\lambda v, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=2u^2+2v^2-1 =>$
stacionarne tačke su $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \lambda_1=-\frac{1}{2}$ i $M_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), \lambda_2=\frac{1}{2}$. Kako je $d^2F=4\lambda du^2+4\lambda dv^2$, a uslov koji vezuje du i dv je $4udu+4vdv=0$, dobijamo:
$M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \lambda_1=-\frac{1}{2} => d^2F=-2du^2-2dv^2<0 => M_1(2,2)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=1$.
$M_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), \lambda_2=\frac{1}{2} => d^2F=2du^2+2dv^2>0 => M_2(-2,-2)$ je lokalni minimum i $z_{min}=-1$.

323. Uvođenjem smene $u=\frac{1}{x}$ i $v=\frac{1}{y}$, funkcija se svodi na $z=\frac{1}{u+v}$, a uslov je$u^2+v^2=2$. Kako je $F(u,v,\lambda)=\frac{1}{u+v}+\lambda(u^2+v^2-2) => \frac{\partial F}{\partial u}=-\frac{1}{(u+v)^2}+2\lambda u, \frac{\partial F}{\partial v}=-\frac{1}{(u+v)^2}+2\lambda v, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=u^2+v^2-2 =>$
stacionarne tačke su $M_1(1,1), \lambda_1=\frac{1}{8}$ i $M_2(-1,-1), \lambda_2=-\frac{1}{8}$. Kako je $d^2F=\left[\frac{2}{(u+v)^3}+2\lambda\right]du^2+\frac{4}{(u+v)^3}dudv+\left[\frac{2}{(u+v)^3}+2\lambda\right]dv^2$, a uslov koji vezuje du i dv je $2udu+2vdv=0$, dobijamo:
$M_1(1,1), \lambda_1=\frac{1}{8} => d^2F=\frac{1}{2}du^2+\frac{1}{2}dudv+\frac{1}{2}dv^2$i $du=-dv => d^2F=\frac{1}{2}dv^2>0 => M_1(1,1)$ je lokalni minimum i $z_{min}=\frac{1}{2}$.
$M_2(-1,-1), \lambda_2=-\frac{1}{8} => d^2F=-\frac{1}{2}du^2-\frac{1}{2}dudv-\frac{1}{2}dv^2$i $du=-dv => d^2F=-\frac{1}{2}dv^2<0 => M_2(-1,-1)$ je lokalni maksimum i $z_{max}=-\frac{1}{2}$.

324. Uvodi se smena $t = 2x + 3$. $\int cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$

325. Uvodi se smena $t = 2x + 3$. $\int sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + c$

326. Radi se parcijalna integracija: $u = x, dv = cosxdx$.
$\int xcosxdx = xsinx + cosx + c.$

327. Radi se parcijalna integracija: $u = x, dv = sinxdx$.
$$\int xsinxdx = -xcosx + sinx + c.$$

328. Uvodi se smena $t = e^x$. $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4ln(e^x+2) + c.$

329. Uvodi se smena $t = e^x$. $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+1}dx = x - \frac{1}{2}ln|e^{2x} - e^x + 1| + \sqrt{3}arctg\frac{(2e^x-1)\sqrt{3}}{3} + c.$

330. Uvodi se smena $t = e^x$. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^x+2)(e^{2x}+1)}dx = -\frac{1}{5}ln(e^x+2) + \frac{1}{10}ln(e^{2x}+1) + \frac{3}{5}arctge^x + c.$

331. Uvodi se smena $t = e^x$. $\int e^{x+e^x}dx = e^{e^x} + c$.

332. Uvodi se smena $t = x^2$. $\int (x^3+x)e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$

333. Uvodi se smena $t = x^3$. $\int (5x^5+x^2)e^{x^3}dx = \frac{1}{3}(5x^3+1)e^{x^3} - \frac{5}{3}e^{x^3} + c.$

334. Uvodi se smena $t = x + 3$. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = arctg(x+3) + c.$

335. Uvodi se smena $x = t^2$. $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x^5} - 5x^2 + 20\sqrt{x^3} - 60x + 120\sqrt{x} - 120\right) + c$.

336. Radi se parcijalna integracija: $u = x^2, dv = cosxdx$.
$$\int x^2cosxdx = x^2sinx + 2xcosx - 2sinx + c.$$

337. Radi se parcijalna integracija: $u = arctgx, dv = xdx$.
$$\int xarctgxdx = \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + c.$$

338. Uvodi se smena $x = t^2$. $\int arctg\sqrt{x}dx = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + c.$

339. Radi se parcijalna integracija: $u = arctgx, dv = x^2dx$.
$$\int x^2arctgxdx = \frac{1}{3}x^3arctgx - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}ln(x^2+1) + c.$$

340. Radi se parcijalna integracija: $u = arccosx, dv = \frac{1}{x^2}dx$.
$$\int \frac{arccosx}{x^2}dx = -\frac{1}{x}arccosx - \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + c.$$

341. Radi se parcijalna integracija: $u = ln(1+x^2), dv = \frac{1}{x^2}dx$.
$$\int \frac{ln(1+x^2)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}ln(1+x^2) + 2arctgx + c.$$

342. Radi se parcijalna integracija: $u = ln\frac{x+1}{x-1}, dv = dx$.
$$\int ln\frac{x+1}{x-1}dx = xln\frac{x+1}{x-1} + ln|x^2-1| + c.$$

343. Radi se parcijalna integracija: $u = ln(x^2+16), dv = dx$.
$$\int ln(x^2+16)dx = xln(x^2+16) - 2x + 8arctg\frac{x}{4} + c.$$

344. Radi se parcijalna integracija: $u = arcsinx, dv = dx$.
$$\int arcsinxdx = xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + c.$$

345. Radi se parcijalna integracija: $u = arcsin^2x, dv = dx$.
$$\int arcsin^2xdx = xarcsin^2x + 2\sqrt{1-x^2}arcsinx - 2x + c.$$

346. Radi se parcijalna integracija: $u = \frac{x^2+2x-3}{x^2}, dv = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$.
$$\int \frac{x^2+2x-3}{x^4}e^{\frac{1}{x}}dx = \frac{7x^2-8x+3}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + c.$$

347. Radi se parcijalna integracija: $u = (sinx - cosx)e^x, dv = \frac{1}{sin^2x}dx$. $\int \frac{sinx-cosx}{sin^2x}e^xdx = \frac{e^x}{sinx} + c.$

348. Radi se parcijalna integracija:$u = e^{3x}, dv = sin(4x)dx$.
$$\int e^{5x}cos(6x)dx = \frac{5}{61}e^{5x}cos(6x) + \frac{6}{61}e^{5x}sin(6x) + c.$$

349. Radi se parcijalna integracija:$u = e^x, dv = sin(4x)dx$.
$$\int e^xsin(4x)dx = -\frac{4}{17}e^xcos(4x) + \frac{1}{17}e^xsin(4x) + c.$$

350. Radi se parcijalna integracija:$u = e^{3x}, dv = sin(2x)dx$.
$$\int sin(2x)e^{3x}dx = -\frac{2}{13}e^{3x}cos(2x) + \frac{3}{13}e^{3x}sin(2x) + c.$$

351. Radi se parcijalna integracija: $u = x, dv = e^x sinxdx$.

$$\int xe^x sinxdx = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^x cosx + \frac{1}{2}xe^x sinx + c.$$

352. $\int \frac{21x^2-94x+72}{x^3-7x^2+12x}dx = 6\int \frac{dx}{x} + 7\int \frac{dx}{x-3} + 8\int \frac{dx}{x-4} = 6ln|x| + 7ln|x-3| + 8ln|x-4| + c.$

353. $\int \frac{21x^2-80x+48}{x^3-6x^2+8x}dx = 6\int \frac{dx}{x} + 7\int \frac{dx}{x-2} + 8\int \frac{dx}{x-4} = 6ln|x| + 7ln|x-2| + 8ln|x-4| + c.$

354. $\int \frac{2x^2+3x-4}{x^3-2x^2+x-2}dx = 2\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = 2ln|x-2| + 3arctgx + c.$

355. $\int \frac{8x^2-12x+2}{x^3-2x^2+x-2}dx = 2\int \frac{dx}{x-2} + 6\int \frac{xdx}{x^2+1} = 2ln|x-2| + 3ln(x^2+1) + c.$

356. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}dx = \int xdx + \int dx + 4\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 2ln|x^2+2x-3| + c.$

357. $\int \frac{x^3-2}{(x^2+1)x}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - 2ln|x| + ln(x^2+1) - arctgx + c.$

358. $\int \frac{9x^3-6x^2+7x-4}{x^4-x^3+x^2-x}dx = 4\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{x}{x^2+1}dx = 4ln|x| + 3ln|x-1| + ln(x^2+1) + c.$

359. $\int \frac{6x^2-2x-2}{x^3-x}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+1} = 2ln|x| + ln|x-1| + 3ln|x+1| + c.$

360. $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}arctgx - \frac{1}{6}arctg\frac{x}{2} + c.$

361. $\int \frac{x+4}{x^4+9x^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+9}dx = \frac{1}{9}ln|x| - \frac{4}{9x} - \frac{1}{18}ln(x^2+9) - \frac{4}{27}arctg\frac{x}{3} + c.$

362. $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx = -8ln|x| + 8ln|2x-1| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + c.$

363. Uvodi se smena $t^2 = x+1$. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}dx = 2\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}-1} + 4ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + c.$

364. Uvodi se smena $t^3 = x+1$. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| + c.$

365. Uvodi se smena $t^6 = x$. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + c.$

366. Uvodi se smena $t^3 = \frac{2+x}{2-x}$. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + c.$

367. Uvodi se smena $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$. $\int \sqrt{\frac{1-x}{x^4(1+x)}}dx = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1} - ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right| + \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1} + ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right| + c.$

368. Uvodi se smena $t^3 = \frac{x+1}{x}$. $\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}dx = -ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1\right| + \frac{1}{2}ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + 1\right) - \sqrt{3}arctg\frac{\left(2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+1\right)\sqrt{3}}{3} + c$.

369. Uvodi se smena $t^3 = x+2$. $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx = \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}{2} - \frac{3}{4}ln\left|\sqrt[3]{x+2}-1\right| + \frac{15}{8}ln\left|\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2} + 2\right| - \frac{27\sqrt{27}}{28}arctg\frac{(2\sqrt[3]{x+2}+1)\sqrt{7}}{7} + c.$

370. Uvodi se smena $x = \frac{1}{cost}$. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + c.$

371. Uvodi se smena $t = tg\frac{x}{2}$. $\int \frac{1}{1+sinx+cosx}dx = ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right| + c.$

372. Radi se parcijalna integracija: $u = ln(x-1), dv = xdx$.

$$\int_2^{e+1} x\,ln(x-1)\,dx = \frac{1}{4}(e+1)^2 + 1 - \frac{1}{2}e.$$

373. Radi se smena: $t = 1-x$.

$$\int_0^1 30x^2(1-x)^5dx = \frac{5}{28}.$$

374. $\int_0^3 arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. Najpre se radi smena $t^2 = \frac{x}{x+1}$.

375. $P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \pi.$

376. $P = -\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2}{x^3-1}dx = ln\frac{16}{7}.$

377. $P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x-e^x}dx + \int_0^{+\infty} e^{x-e^x}dx = 1.$

378. $P = \int_{-\infty}^{-2\sqrt{2}}(x^2-8)e^xdx - \int_{-2\sqrt{2}}^{0}(x^2-8)e^xdx = 6 + 4e^{-2\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)$..

379. $P = \int_8^9 \left(\frac{x^2-4x-5}{x-7} - (x+3)\right) dx = 16ln2.$

380. $P = \int_7^8 \left(\frac{x^2-7x+10}{x-6} - (x-1)\right) dx = 4ln2.$

381. $P = \int_7^8 \left(\frac{x^2-2x-15}{x-6} - (x+4)\right) dx = 9ln2.$

382. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}.$

383. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x-e^x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{x-e^x}dx = 1.$

384. 1) $a \in [-2,0] \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{(a+1)^2}} = +\infty$

2) $a \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{(a+1)^2}} = \frac{1}{(a+1)^2-1}.$

385. $\iint_D dxdy = P(D) = 12.$

386. $\iint_D dxdy = P(D) = 4$

387. $\iint_D dxdy = P(D) = 16$

388. $\iint_D dxdy = P(D) = 8.$

389. $\iint_D dxdy = P(D) = \frac{11}{2}.$

390. $\iint_D dxdy = P(D) = r^2\pi = 2\pi.$

391. $\iint_D dxdy = P(D) = r^2\pi = \pi.$

392. $\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{0} ydy \int_0^{\sqrt{-y^2+8y+9}} xdx = -\frac{19}{24}.$

393. $\iint_D xydxdy = \int_{0}^{9} ydy \int_{-\sqrt{-y^2+8y+9}}^{0} xdx = -\frac{2673}{8}.$

394. $\iint_D xydxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{0} xdx \int_{-\sqrt{2-\frac{2}{3}x^2}}^{0} ydy = \frac{3}{4}.$

395. $\iint_D xydxdy = \int_{0}^{\sqrt{3}} xdx \int_{-\sqrt{2-\frac{2}{3}x^2}}^{0} ydy = -\frac{3}{4}.$

396. $\iint_D xydxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{0} xdx \int_{-\sqrt{3-\frac{3}{2}x^2}}^{0} ydy = \frac{3}{4}.$

397. $\iint_D xydxdy = \int_{5}^{9} xdx \int_{-\sqrt{14x-x^2-45}}^{0} ydy = -\frac{112}{3}.$

398. $\iint_D xydxdy = \int_{2}^{6} xdx \int_{0}^{\sqrt{-x^2+8x-12}} ydy = \frac{64}{3}.$

399. $\iint_D xydxdy = \int_{2}^{6} xdx \int_{-\sqrt{-x^2+8x-12}}^{0} ydy = -\frac{64}{3}.$

400. $\iint_D xydxdy = \int_{2}^{6} ydy \int_{0}^{\sqrt{-y^2+8y-12}} xdx = \frac{64}{3}.$

401. $\iint_D xydxdy = \int_{2}^{6} ydy \int_{-\sqrt{-y^2+8y-12}}^{0} xdx = -\frac{64}{3}.$

402. $\iint_D xydxdy = \int_{1}^{5} xdx \int_{-\sqrt{-x^2+6x-5}}^{0} ydy = -16.$

403. $\iint_D xydxdy = \int_{3-\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} xdx \int_{0}^{\sqrt{-x^2+6x-7}} ydy = 21 + \frac{25}{3}\sqrt{2}$

404. $\iint_D xydxdy = \int_{1}^{5} ydy \int_{-\sqrt{-y^2+6y-5}}^{0} xdx = -16.$

405. $\iint_D xydxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} xdx \int_{x^2-3}^{0} ydy = 0.$

406. $\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy = \frac{64}{15}.$

407. $\iint_D (x+y)dxdy = \int_{-1}^{3} dy \int_{y^2}^{2y+3} (x+y)dx = 19\frac{14}{15}.$

408. $\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)dy = \frac{9}{20}$.
409. $\iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2x+y)dy = \frac{9}{20}$.
410. $\iint_D (y+yx)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (y+yx)dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y+yx)dy = \frac{5}{16}$.
411. $\iint_D xe^{y^2}dxdy = \int_0^4 e^{y^2}dy \int_0^{\sqrt{y}} xdx = \frac{1}{4}(e^{16}-1)$.
412. $\iint_D \frac{y}{1+xy}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y}{1+xy}dy = ln\,4-1$.
413. $\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} f(x,y)dy = \int_1^e dy \int_0^{ln\,y} f(x,y)dx$.
414. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.
415. $ln|1-y|+\frac{1}{2}ln(x^2+9)=C$.
416. $x+y-ln|(x+1)(y+1)|=C$.
417. $lny-3arctgx-2ln|x-2|=C$.
418. $2ln|y-2|+3ln(y^2+1)-\frac{x^2}{2}=C$.
419. $\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{(y+3)\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{13}}{13}ln\left|\frac{x-\frac{3+\sqrt{13}}{2}}{x-\frac{3-\sqrt{13}}{2}}\right|=C$.
420. $\frac{e^{\frac{y}{x}}+1}{x}=C$.
421. $\frac{ln\frac{y}{x}}{x}=C$.
422. $\frac{y}{x}+2ln\left|\frac{y}{x}\right|+ln|x|=C$.
423. $y=Ce^{x^2}-x^2-1$.
424. $y=Cx-xcosx$.
425. $y=Ce^{cosx}+1$.
426. $y=Cx+xsinx$.
427. $y=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{4}x^2$.
428. $y=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$.
429. $y=\frac{1}{x^4+x}\left[C+\frac{x^3}{3}-2ln|x|\right]$
430. $y=\left(Ce^{\frac{1}{2}x}-2x^2-8x-16\right)^2$.
431. $y=\frac{1}{\sqrt{Ce^{-x}+x-1}}$.
432. $y=\frac{1}{\sqrt{\frac{C}{x^2}-\frac{1}{3}x^4}}$.
433. $=\left(\frac{C}{x}+\frac{1}{2}\right)^2$.
434. $y=C_1sinx+C_1cosx-\frac{1}{2}xcosx$.
435. $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$.
436. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{12}x^4\right)e^x$.
437. $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$
438. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+(x-1)e^{2x}$.
439. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+(x-1)e^{2x}+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$.
440. $y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{12}x^4e^x$
441. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{8}cos(2x)e^x$.
442. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{4}x+\frac{7}{48}+xe^{4x}$.
443. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{3}x+\frac{7}{36}-xe^{3x}$.
444. $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{3}x+\frac{7}{36}+xe^{-3x}$.
445. $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^x-\frac{3}{5}sinx-\frac{9}{5}cosx$.
446. $y=C_1+C_2e^{-2x}+(3x-4)e^x-sinx-2cosx$.
447. $y=C_1e^{-8x}+C_2e^{-9x}-xe^{-9x}-\frac{1}{9}x+\frac{17}{648}$.
448. $y=C_1e^{-8x}+C_2e^{-9x}+xe^{-8x}-\frac{1}{8}x+\frac{17}{576}$.
449. $y=C_1e^{9x}+C_2e^{8x}-xe^{8x}+\frac{1}{8}x+\frac{17}{576}$.
450. $y=C_1sin(4x)+C_2cos(4x)+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}xcos(4x)$.

451. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{8}xe^{4x} - \frac{1}{4}x$.
452. $y = C_1sin(3x) + C_2cos(3x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}xcos(3x)$
453. $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}sin(2x) + \frac{1}{8}cos(2x)$.
454. $y = C_1 + C_2e^{x} - \frac{1}{2}sinx + \frac{1}{2}cosx + \frac{1}{2}e^{-x}$.
455. $y = C_1 + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}sinx - \frac{1}{2}cosx - xe^{-x}$.
456. $y = C_1 + C_2e^{7x} - \frac{1}{14}x^2 - \frac{1}{49}x + \frac{1}{7}xe^{7x}$.
457. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{x} + \frac{1}{2}xe^{3x} - \frac{1}{30}sin(3x) + \frac{1}{15}cos(3x)$.
458. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}xe^{3x}$.
459. $y = C_1sin(2x) + C_2cos(2x)$ je rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y = 0$.
460. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ je rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 4y = 0$.
461. $y_t = \frac{1}{5} + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^t = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^t$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka $\frac{1}{5}$.
462. $y_t = \frac{1}{5} + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^t = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^t$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka $\frac{1}{5}$.
463. $f(x) = C_1 \cdot 4^x + C_2 \cdot x \cdot 4^x + 1$
464. $y_t = C_1 \cdot 3^t + C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t - 3, y = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t - 3$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka -3.
465. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t + 6, y = -31 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t + 6$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 6.
466. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1, y = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ divergira ka $+\infty$.
467. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{1}{2}, y = -\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{1}{2}$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka $\frac{1}{2}$.
468. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 2, y = -\left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 2$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 2.
469. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t + 1, y = -\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 1.
470. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 2, y = -\frac{17}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 2$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 2.
471. $y_t = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^t - 2, y = 2^t + \left(-\frac{1}{2}\right)^t - 2$. Rešenje kad $t \to \infty$ divergira ka $+\infty$.
472. $y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(C_1 \cdot sin\frac{\pi}{4}t + C_2 \cdot cos\frac{\pi}{4}t\right) + 1, y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-2sin\frac{\pi}{4}t - cos\frac{\pi}{4}t\right) + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 1.
473. $y_t = C_1 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{2}{63}, y = -\frac{140}{117} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^t + \frac{106}{91} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{2}{63}$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka $\frac{2}{63}$.
474. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{2}{35}, y = -\frac{84}{145} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^t + \frac{106}{203} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{2}{35}$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka $\frac{2}{35}$.
475. $y_n = C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1, y = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1$. Rešenje kad $n \to \infty$ konvergira ka 1.
476. $y_n = C_1 \cdot \left(\frac{-3+\sqrt{65}}{14}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{-3-\sqrt{65}}{14}\right)^n + 1, y = \frac{11-\sqrt{65}}{2\sqrt{65}} \cdot \left(\frac{-3+\sqrt{65}}{14}\right)^n + \frac{-11-\sqrt{65}}{2\sqrt{65}} \cdot \left(\frac{-3-\sqrt{65}}{14}\right)^n + 1$. Rešenje kad $n \to \infty$ konvergira ka 1.
477. $y_n = C_1 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^n + C_2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2, y = -\frac{28}{5} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^n + \frac{18}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2$. Rešenje kad $n \to \infty$ konvergira ka 2.
478. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^t + 2, y = -\frac{33}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{28}{5} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^t + 2$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 2.
479. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1, y = -\frac{12}{17} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{12}{17} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 1.
480. $y_t = C_1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1, y = \frac{12}{17} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t - \frac{12}{17} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 1.
481. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1, y = -12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ konvergira ka 1.
482. $y_t = C_1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + C_2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^t + 1, y = -\frac{46}{7} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{39}{7} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ divergira ka $\pm\infty$.
483. $y_t = C_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t + C_2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + 1, y = -\frac{15}{7} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t + \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ divergira ka $-\infty$.
484. $y_t = C_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + C_2 \cdot (-3)^t + 1, y = \frac{11}{16} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t - \frac{27}{16} \cdot (-3)^t + 1$. Rešenje kad $t \to \infty$ divergira ka $\pm\infty$.
485. a) $\left.\begin{matrix} p = \frac{3}{4} \\ n = 4 \\ k = 2 \end{matrix}\right\} => P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$.

b) $P = \frac{\binom{30}{2}\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}} = \frac{3915}{18278}$.

486. a) $P(A)=\frac{\binom{6}{3}\binom{8}{0}+\binom{6}{0}\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}}=\frac{19}{91}$.

$P(B)=\frac{\binom{6}{0}\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}}=\frac{2}{13}$.

b) $P(A)=\left(\frac{6}{14}\right)^3+\left(\frac{8}{14}\right)^3$.

$P(B)=\left(\frac{8}{14}\right)^3$

487. $P=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{37}{64}$.

488. Označimo događaje:

A – da smo izvukli belu kuglicu,
B – da smo iz druge u prvu prebacili belu,
C – da smo iz druge u prvu prebacili crvenu.

Tada važi: $P(A)=P(A|B_1)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)+P(A|B_2)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_2)=\frac{6}{16}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{16}\cdot\frac{7}{10}=\frac{53}{160}$.

489. a) $P(A)=\frac{\binom{6}{4}\binom{8}{0}+\binom{6}{0}\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}}=\frac{85}{1001}$.

$P(B)=\frac{\binom{6}{2}\binom{8}{2}+\binom{6}{1}\binom{8}{3}+\binom{6}{0}\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}}=\frac{118}{143}$.

b) $P(A)=\left(\frac{6}{14}\right)^4+\left(\frac{8}{14}\right)^4$.

$P(B)=\binom{4}{2}\left(\frac{8}{14}\right)^2\left(\frac{6}{14}\right)^2+\binom{4}{3}\left(\frac{8}{14}\right)^3\left(\frac{6}{14}\right)^1+\binom{4}{4}\left(\frac{8}{14}\right)^4\left(\frac{6}{14}\right)^0$.

490. $P(A)=\frac{\binom{8}{1}\binom{7}{1}}{\binom{8}{1}\binom{9}{1}+\binom{8}{1}\binom{7}{1}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}}=\frac{56}{191}$.

$P(B)=\frac{\binom{8}{1}\binom{7}{1}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}}{\binom{8}{1}\binom{9}{1}+\binom{8}{1}\binom{7}{1}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}}=\frac{119}{191}$.

491. Označimo događaje:

A – da se pojavio broj 1,
B_1 – da smo izvukli prvu kocku,
B_2 – da smo izvukli drugu kocku.

Tada važi: $P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$.

492. Označimo događaje:

A – da je izvučena 1 bela i 2 crvene,
B – da smo izgubili belu kuglicu,
C – da smo izgubili crvenu kuglicu.

Tada važi:

$$P(A)=P(A|B)\cdot \mathrm{P(B)}+P(A|C)\cdot \mathrm{P(C)}=\frac{\binom{7}{1}\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}\cdot\frac{8}{17}+\frac{\binom{8}{1}\binom{8}{2}}{\binom{16}{3}}\cdot\frac{9}{17}=\frac{36}{85}.$$

$P(B|A)=\frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{18}{85}}{\frac{36}{85}}=\frac{1}{2}$.

$P(C|A)=\frac{1}{2}$.

493. a) Označimo događaje:

A – da je izvučena bela kuglica,
B_1 – da smo prebacili belu kuglicu,
B_2 – da smo prebacili crvenu kuglicu.

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)+P(A|B_2)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_2)=\frac{x+1}{x+y+1}\cdot\frac{b}{b+c}+\frac{x}{x+y+1}\cdot\frac{c}{b+c}$$

b) Označimo događaje:

A – da je izvučena bela kuglica,
B_1 – da smo prebacili 3 bele kuglice,
B_2 – da smo prebacili 2 bele i 1 crvenu,
B_3 – da smo prebacili 1 belu i 2 crvene,
B_4 – da smo prebacili 3 crvene.

$P(A)=P(A|B_1)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)+P(A|B_2)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_2)+P(A|B_3)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_3)+P(A|B_4)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_4)=$

$=\frac{x+3}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{3}\cdot\binom{c}{0}}{\binom{b+c}{3}}+\frac{x+2}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{2}\cdot\binom{c}{1}}{\binom{b+c}{3}}+\frac{x+1}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{1}\cdot\binom{c}{2}}{\binom{b+c}{3}}+\frac{x}{x+y+3}\cdot\frac{\binom{b}{0}\cdot\binom{c}{3}}{\binom{b+c}{3}}$.

494. a) $P(A)=\frac{\binom{b}{a}+\binom{c}{a}}{\binom{b+c}{a}}, P(B)=1-\frac{\binom{b}{0}\binom{c}{a}+\binom{b}{1}\binom{c}{a-1}}{\binom{b+c}{a}}$.

b) $P(A)=\left(\frac{b}{b+c}\right)^a+\left(\frac{c}{b+c}\right)^a, P(B)=1-\binom{a}{0}\left(\frac{b}{b+c}\right)^0\left(\frac{c}{b+c}\right)^a-\binom{a}{1}\left(\frac{b}{b+c}\right)^1\left(\frac{c}{b+c}\right)^{a-1}$.

495. $P(A)=\frac{1}{37^{13}}, P(B)=\frac{13!}{37^{13}}, P(C)=\frac{1}{37^{12}}, P(D)=\frac{1}{37^{13}}$.

496. $P(A)=\frac{1}{16}, P(B)=\frac{1}{16}, P(C)=\frac{1}{4}$.

497. Prost kamatni račun:

Krajnja vrednost kapitala K_n (uvećani ulog zajedno sa interesom na interes) je:

$K_n=K_0\left(1+\frac{pg}{100}\right)$, g-vreme u godinama,

$K_n=K_0\left(1+\frac{pm}{1200}\right)$, m-vreme u mesecima,

$K_n=K_0\left(1+\frac{pd}{36000}\right)$, d-vreme u danima (godina 360 dana),

$K_n=K_0\left(1+\frac{pd}{36500}\right)$, d-vreme u danima (godina 365 dana).

Stopa rasta akumulacije je: $\frac{K_n-K_{n-1}}{K_{n-1}}$ tako da za slučaj prostog kamatnog računa iznosi: $\frac{p}{100}$.

Složen kamatni račun:

Krajnja vrednost kapitala K_n (uvećani ulog zajedno sa interesom na interes) pri godišnjem kapitalisanju nakon n godina je $K_n=K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$,gde je K_0 početni kapital a p dekurzivna interesna stopa. Kapitalisanje pored godišnjeg u oznaci (pa) može biti šestomesečno (ps), tromesečno (pd), mesečno (pm), dnevno i neprekidno.

Računanje i odobravanje kamate na kraju određenog vremenskog intervala zove se dekurzivno računanje interesa i označava se slovom d uz interesnu stopu. Tako (pa) d znači da je interesna stopa p% godišnja.

Ako se kapitalisanje vrši m puta godišnje uz interesnu stopu p% tada je krajnja vrednost kapitala K_0 posle n godina $K_{mn}=K_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}$.

Ako je kapitalisanje neprekidno uz godišnju interesnu stopu p%, tada je krajnja vrednost kapitala K_0 posle vremena t koje je dato u godinama (t ne mora biti ceo broj) jednaka $K_t=K_0e^{\frac{pt}{100}}$.

Stopa rasta akumulacije je: $\frac{K_n-K_{n-1}}{K_{n-1}}$ tako da za slučaj složenog kamatnog računa iznosi:

$\frac{p}{100},\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m-1$, i $e^{\frac{p}{100}}-1$ redom.

498. Isto kao u predhodnom zadatku.

499. $p_e=\left[\left(1+\frac{p_n}{100m}\right)^m-1\right]\cdot 100$.

a) $p_e=\left[\left(1+\frac{20}{200}\right)^2-1\right]\cdot 100=21\%$.

b) $p_e=\left[\left(1+\frac{20}{400}\right)^4-1\right]\cdot 100=21{,}55\%$.

c) $p_e=\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{20}{100m}\right)^m-1\right]\cdot 100=(e^{0{,}2}-1)\cdot 100=22{,}14\%$.

500. $p_e=\left[\left(1+\frac{p_n}{100m}\right)^m-1\right]\cdot 100$.

a) $p_e=\left[\left(1+\frac{40}{200}\right)^2-1\right]\cdot 100=44\%$.

b) $p_e=\left[\left(1+\frac{40}{400}\right)^4-1\right]\cdot 100=46{,}41\%$.

c) $p_e=\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{40}{100m}\right)^m-1\right]\cdot 100=(e^{0{,}4}-1)\cdot 100=49{,}18\%$.

DODATAK A
PODSETNIK

U podsetniku je dat kratak pregled osnovnih pojmova iz srednje škole, koji su Vam neophodni, a koji se ne uče ni na predavanjima ni na vežbama, jer se podrazumeva da to znate.

Preporučujem da ovo prvo pročitate.

Sve što je dato u podsetniku morate dobro da savladate, kako bi to kasnije efikasno koristili pri izradi ispitnih zadataka.

1) Iskazi

Tablica istinitosti "i" i "ili" iskaza:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

2) Skupovi brojeva u elementarnoj matematici

Skup prirodnih brojeva $N = \{1,2,3,\dots\}$.

Skup celih brojeva $Z = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$.

Skup racionalnih brojeva $Q = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N\right\}$.

Skup realnih brojeva $R = Q +$ iracionalni, gde su iracionalni brojevi oni brojevi koji ne mogu da se predstave pomoću razlomka kao što su $\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \dots$

Neke osnovne formule

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2. $a^2 + b^2 =$ ne može se rastaviti.
3. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
5. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
6. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
8. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3) Binomni koeficijenti

To su izrazi oblika $\binom{n}{k}$.

Računaju se na sledeći način:

Na primer $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35, \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126, \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$

Kao što vidite dole je uvek faktorijel donjeg broja, tj proizvod svih brojeva od njega do jedinice, a gore je proizvod gornjeg broja i brojeva unazad onoliko koliki je donji broj.

Osobine binomnih koeficijenata:

1) $\binom{n}{0} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Tako na primer $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$

4) Stepenovanje

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-činioca}$

Osobine stepena:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
5. $a^m : a^n = a^{m-n}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$
7. $(ab)^n = a^n b^n$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5) Korenovanje

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$

Osobine korena:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
6. $\sqrt{a^2} = |a|, \ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
7. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

6) Specijalne funkcije

a) Apsolutna vrednost $|x|$.

Apsolutna vrednost je funkcija koja sve brojeve pretvara u nenegativne. Na primer $|-8| = 8, \left|-\frac{27}{4}\right| = \frac{27}{4}, |3| = 3.$

Definicija apsolutne vrednosti: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

b) Signum funkcija $\operatorname{sgn}(x)$.

Signum funkcija je funkcija koja određuje znak broja. Na primer $sgn(5) = 1, sgn(100) = 1, sgn(-2) = -1, sgn(0) = 0$

Definicija signum funkcije je: $sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Između prethodne dve funkcije postoji sledeća veza: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x).$

c) Faktorijel funkcija $n!$

Na primer $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$

Uvek može da se napiše veza između dva faktorijela. Tako na primer važi: $n! = n \cdot (n-1)!, (n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!$

7) Logaritmovanje

$x = \log_c a,$ gde je a podlogaritamski deo i c osnova logaritma. Uslovi postojawa logaritma su: $a, c > 0 \wedge c \neq 1.$

$x = \log_c a \Leftrightarrow a = c^x.$

Osobine logaritama:

1. $log_c 1 = 0$
2. $log_c c = 1$
3. $log_c(ab) = log_c a + log_c b$
4. $log_c\left(\frac{a}{b}\right) = log_c a - log_c b$
5. $log_c a^n = n log_c a \Rightarrow log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} log_c a$
6. $log_{10} a = \log a$
7. $log_e a = \ln a \, (e \approx 2{,}72)$
8. $\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}$

8) Imaginarni i kompleksni brojevi

$i = \sqrt{-1} \rightarrow$ imaginarna jedinica

Kako je $i = \sqrt{-1} \Rightarrow \sqrt{-16} = 4i, \sqrt{-36} = 6i, \sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot i$ itd.

Kompleksni brojevi se najčešće označavaju sa $z = u + iv,$ gde je u

realni deo kompleksnog broja, a v imaginarni deo. Tako na primer:

$$z = 2 + 3i \Rightarrow u = 2, v = 3$$
$$z = -3i \Rightarrow u = 0, v = -3$$

itd.

9) Jednačine

A) Linearne jednačine sa jednom nepoznatom

To su jednačine oblika $ax = b.$

Rešenje je:

1) Za $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}.$

2) Za $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow$ jednačina nema rešenja.

3) Za $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow$ jednačina ima beskonačno mnogo rešenja.

B) Kvadratne jednačine

To su jednačine oblika $ax^2 + bx + c = 0.$

Diskriminanta kvadratne jednačine je $D = b^2 - 4ac.$

Rešenja su:

1) Za $D > 0 \Rightarrow$ jednačina ima dva realna različita rešenja i to su $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

2) Za $D = 0 \Rightarrow$ jednačina ima dva realna i jednaka rešenja i to su $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$

3) Za $D < 0 \Rightarrow$ jednačina nema realnih rešenja.

C) Iracionalne jednačine

To su jednačine u kojima se nepoznata nalazi ispod korena.

Kako se one rešavaju najbolje će se videti iz sledećih primera:

1) $\sqrt{x} = 4 \quad /^2$

$x = 16$

2) $\sqrt{x^2 + 9} = 5 \quad /^2$

$x^2 + 9 = 25$

$x^2 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4.$

3) $\sqrt[3]{x} = -2 \quad /^3$

$x = -8$

4) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{5x+1} = 0$

$\sqrt{2x+3} = \sqrt{5x+1} \quad /^2$

$2x + 3 = 5x + 1$

$-3x = -2$

$x = \frac{2}{3}$

5) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$

$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{2x+3}$

$x + 1 = 1 - 2\sqrt{2x+3} + 2x + 3$

$2\sqrt{2x+3} = x + 3$

$4(2x+3) = x^2 + 6x + 9$

$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = 3$

Međutim $x_2 = 3$ nije rešenje jednačine jer ne zadovoljava uslove, tako da je jedino rešenje $x = -1$.

D) Eksponencijalne jednačine
To su jednačine u kojima se nepoznata nalazi u eksponentu.
Kako se one rešavaju najbolje će se videti iz sledećih primera:

1) $3^{x-1}=81$

$3^{x-1}=3^4$

$x-1=4$

$x=5.$

2) $\left(5^{x+1}\right)^{x-1}=\left(5^{x-2}\right)^x$

$5^{x^2-1}=5^{x^2-2x}$

$x^2-1=x^2-2x$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}.$

3) $a^{2x}\cdot a^{1-3x}=a^{5x}:a^{3x-1}$

$a^{1-x}=a^{2x+1}$

$1-x=2x+1$

$-3x=0$

$x=0.$

4) $10^{x-4}=0{,}01$

$10^{x-4}=10^{-2}$

$x-4=-2$

$x=2.$

5) $2^{x-1}=3 \quad / \ln$

$\ln 2^{x-1}=\ln 3$

$(x-1)\ln 2=\ln 3$

$x=1+\frac{\ln 3}{\ln 2}.$

E) Logaritamske jednačine
To su jednačine u kojima se nepoznata nalazi u logaritmu.
Kako se one rešavaju najbolje će se videti iz sledećih primera:

1) $\ln x=3\ln 5$

$\ln x=\ln 5^3$

$x=125.$

2) $\ln(x-1)=2$

$x-1=e^2$

$x=e^2+1.$

3) $\frac{1}{3}\ln(x-1)=1$

$\ln(x-1)=3$

$x-1=e^3$

$x=e^3+1$

4) $\ln x + \ln(x+1) = 2\ln(1-x)$

$\ln(x^2 + x) = \ln(1 - 2x + x^2)$

$x^2 + x = 1 - 2x + x^2$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}.$

10) Nejednačine

A) Linearne nejednačine

To su nejednačine oblika $ax + b \circ 0,$ gde je sa $\circ$ označen neki od znakova $>, \geq, <, \leq.$ Ove nejednačine su dosta jednostavne za rešavanje, što ćete videti i iz primera.

1) $3x - 5 > x + 3$

$2x > 8$

$x > 4.$

2) $5 + x > 10$

$x > 5.$

3) $5 - x > 10$

$-x > 5$

$x < -5$

4) $\frac{2x+1}{3} < \frac{3x-1}{15} \quad /15$

$10x + 5 < 3x - 1$

$7x < -6$

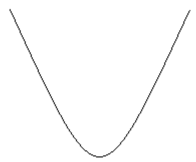
$x < -\frac{6}{7}.$

B) Kvadratne nejednačine

To su nejednačine oblika $ax^2 + bx + c \circ 0,$ gde je sa $\circ$ označen neki od znakova $>, \geq, <, \leq.$ Ove nejednačine se rešavaju crtanjem grafika kvadratne funkcije.

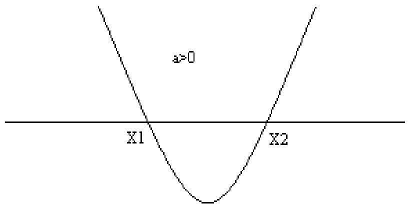
Grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ se crta na sledeći način:

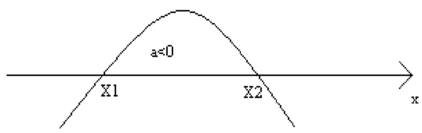
1) Ako je $a > 0$ funkcija se "smeje" pa ima sledeći izgled:



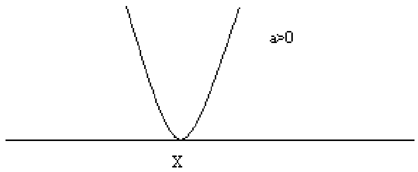
2) Ako je $a < 0$ funkcija "plače" pa ima sledeći izgled:

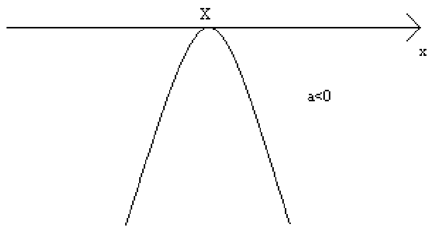
3) Ako je $D>0$ grafik ima dve tačke preseka sa $x-$ osom i to su $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Grafik ima sledeći izgled:



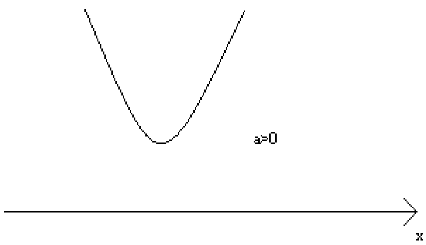


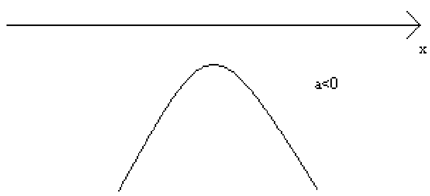
4) Ako je $D=0$ grafik ima jednu dodirnu tačku sa $x-$ osom i to je $x=\dfrac{-b}{2a}$. Grafik ima sledeći izgled:





5) Ako je $D<0$ grafik nema dodirnih tačaka sa $x-$ osom. Grafik ima sledeći izgled:

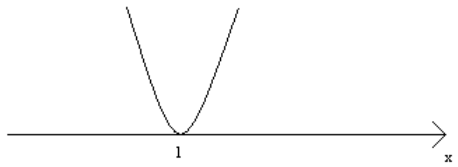




Na sledećih nekoliko primera videćete primenu prethodnog.

1) $x^2-2x+1>0$

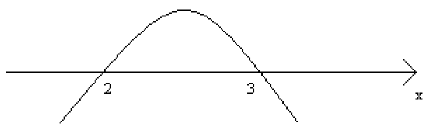
$D=0\Rightarrow$ grafik dodiruje $x-$ osu u tački $x=1$. Kako je $a>0$ grafik funkcije ima sledeći izgled:



Dakle, rešenje nejednačine je $x = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

2) $-x^2 + 5x - 6 < 0$

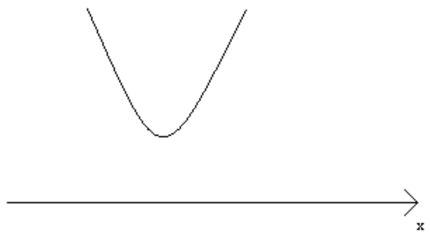
$D = 1 \Rightarrow$ grafik seče $x -$ osu u tačkama $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Kako je $a < 0$ grafik funkcije ima sledeći izgled:



Dakle, rešewa nejednačine su $x = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

3) $x^2 - 2x + 2 < 0$

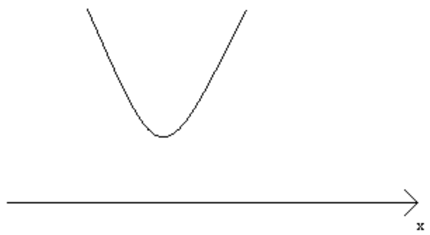
$D = -4 \Rightarrow$ grafik neka dodirnih tačaka sa $x -$ osom. Kako je $a > 0$ grafik funkcije ima sledeći izgled:



Dakle, nejednačina nema rešenja.

4) $x^2 + x + 1 > 0$

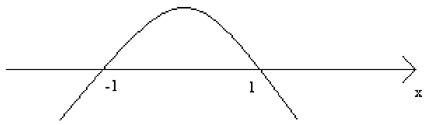
$D = -3 \Rightarrow$ grafik neka dodirnih tačaka sa $x -$ osom. Kako je $a > 0$ grafik funkcije ima sledeći izgled:



Dakle, rešenje nejednačine je $x = (-\infty, \infty)$.

5) $-x^2 + 1 \geq 0$

Grafik seče $x -$ osu u tačkama $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Kako je $a < 0$ grafik funkcije ima sledeći izgled:



Dakle, rešenje nejednačine je $x = [-1,1]$.

C) Logaritamske nejednačine
To su nejednačine u kojima se javlja logaritam.
Kako se one rešavaju najbolje će se videti iz sledećih primera:

1) $\ln x > 0$

$x > e^0 \wedge x > 0$

$x > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow x = (1, \infty)$.

2) $\ln x > 1$

$x > e^1 \wedge x > 0$

$x > e \wedge x > 0 \Rightarrow x = (e, \infty)$.

3) $\ln(x+3) < 5$

$x + 3 < e^5 \wedge x + 3 > 0$

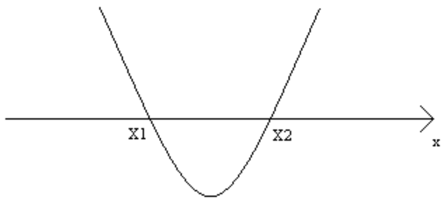
$x < e^5 - 3 \wedge x > -3 \Rightarrow x = (-3, e^5 - 3)$.

4) $\ln(x(x+2)) < 0$

$x^2 + 2x < 1$

$x^2 + 2x - 1 < 0$

$D = 8 \Rightarrow$ grafik seče $x -$ osu u tačkama $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ i $x_2 = -1 + \sqrt{2}$. Kako je $a > 0$ grafik funkcije ima sledeći izgled:



Osim toga postoji uslov da podlogaritamski deo bude pozitivan, tj. $x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.

Dakle, rešenje nejednačine je $x = (-1 - \sqrt{2}, 2) \cup (0, -1 + \sqrt{2})$.

D) Kombinovane nejednačine
To su nejednačine u kojima su na razne načine iskombinovana prethodna tri tipa. To ćete videti kroz sledeći primer:

$$\frac{(2-x)(x+3)(x^2-9)}{\ln(x^2+1)} \geq 0$$

Kombinovane nejednačine se najlakše rešavaju pomoću tablice.

		-3		0		2		3	
2-x	+++++++		++++++		++++++++	0	----------		----------
x+3	----------	0	++++++		++++++++		++++++++		+++++++++++++
x^2-9	+++++++	0	--------		----------		----------	0	+++++++++++++
ln(x^2+1)	+++++++		++++++	0	++++++++		++++++++		++++++++++++++
R	-	0	-	x	-	0	+	0	-

Dakle rešenje nejednačine je $x = [2,3] \cup \{-3\}$.

Napomena: Funkcija nema nulu u tački $x = 0$ jer je to donji deo razlomka.

11) Neodređeni i određeni izrazi

Neodređeni izrazi su izrazi čiju vrednost ne znamo. To su sledeći izrazi:

$$\infty - \infty, \infty \cdot 0, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Određeni izrazi su svi ostali, tj. izrazi čija se vrednost zna. U nastavku su date vrednosti nekih određenih izraza na kojima studenti često greše:

$$\infty + \infty = \infty, \infty \pm a = \infty, a - \infty = -\infty, \infty \cdot \infty = \infty, \frac{\pm a}{\infty} = 0, \frac{\infty}{a} = \infty,$$

$$\frac{\infty}{-a} = -\infty, \frac{a}{0} = \infty, \frac{-a}{0} = -\infty, \ln 0 = -\infty, \ln \infty = \infty,$$

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty, a > 1 \\ 0, 0 < a < 1 \end{cases}, \quad a^{-\infty} = \begin{cases} 0, a > 1 \\ \infty, 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} e^{-\infty} = 0 & ln0 = -\infty \\ e^{0} = 1 & ln1 = 0 \\ e^{1} = e & lne = 1 \\ e^{\infty} = +\infty & ln\infty = +\infty \end{array}$$

12) Trigonometrija

Osnovne trigonometrijske funkcije su $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ i $ctg\alpha$, gde je α ugao koji može biti izražen u stepenima ili u radijanima. Veza između stepena i radijana je $180^{\circ} = \pi\ rad$.

Vrednosti trigonometrijskih funkcija za neke uglove

α(°)	0	30	45	60	90	180	270	360
α(rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sinα	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
tgα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
ctgα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$	0	∞

Trigonometrijski identiteti

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

3) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

6) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

7) $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

8) $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

9) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

10) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

11) $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$

12) $ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\beta\, ctg\alpha \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

13) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

14) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

15) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

16) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

17) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

18) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

19) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

20) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

21) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Inverzne trigonometrijske funkcije

Inverzne trigonometrijske funkcije su $\arcsin x, \arccos x, arctgx$ i $arcctgx$. One su definisane na sledeći način:

$\arcsin x = \alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = x$

$\arccos x = \alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = x$

$arctgx = \alpha \Leftrightarrow tg\alpha = x$

$arcctgx = \alpha \Leftrightarrow ctg\alpha = x$

Tako je na primer $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ jer je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, a $arctg\infty = \frac{\pi}{2}$ jer je $tg\frac{\pi}{2} = \infty$.

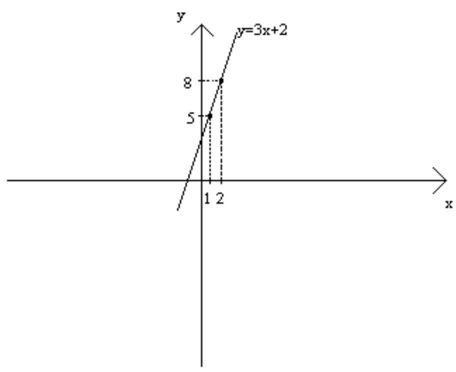
13) Analitička geometrija

A) Prava linija

Prava se najčešće predstavlja u eksplicitnom obliku $y = kx + n$, gde je k koeficijent pravca, a n odsečak na $y-$ osi. Za koeficijent pravca k važi: $k = tg\alpha$, gde je α ugao koji prava zaklapa sa $x-$ osom. Prava se najlakše crta na sledeći način:
Na primer imamo pravu $y = 3x + 2$. Formiramo sledeću tabelu:

x	1	2
y	5	8

Crtamo tačke $(1,5)$ i $(2,8)$, a zatim nacrtamo pravu kroz te tačke i to je tražena prava.



Prava oblika $x = n$ je prava paralelna $y-$ osi a $x-$ osu seče u n.

Prava oblika $y = n$ je prava paralelna $x-$ osi a $y-$ osu seče u n.

Jednačina prave kroz dve tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ je:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$ i ima koeficijent pravca k je: $y = k(x - x_1) + y_1$.

Uslov paralelnosti dve prave je: $k_1 = k_2$.

Uslov normalnosti dve prave je: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Ugao φ između dve prave nalazi se iz relacije: $tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

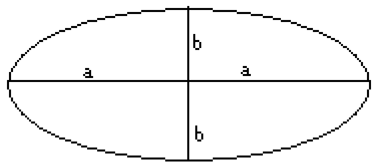
B) Krug

Jednačina kruga je: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, gde su p i q, koordinate centra kruga, a r poluprečnik.

Tako na primer krug čija je jednačina: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ ima centar u tački $O(2,3)$, a poluprečnik 2, dok krug čija je jednačina $x^2 + (y+3)^2 = 1$ ima centar u tački $O(0,-3)$, a poluprečnik 1.

C) Elipsa

Elipsa ima sledeći izgled:

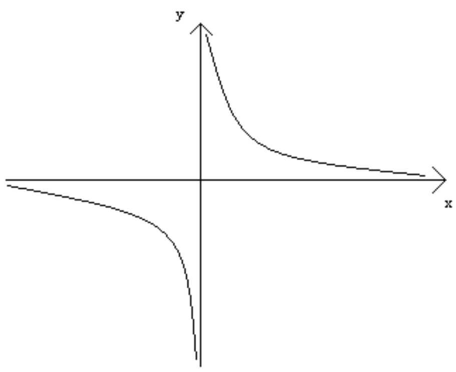


Dužina $x-$ poluose je a, a $y-$ poluose b.

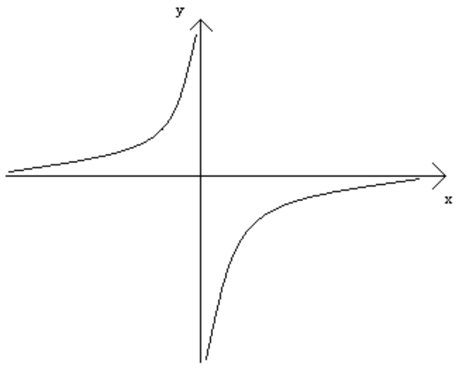
Jednačina elipse je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gde su a i b dužine x i y poluose, a centar elipse je uvek u koordinatnom početku.

D) Hiperbole oblika $xy = n$.

1. Ako je $n > 0$ hiperbola ima sledeći izgled:

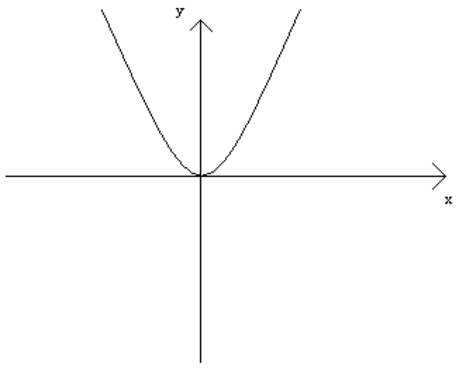


2. Ako je $n<0$ hiperbola ima sledeći izgled:

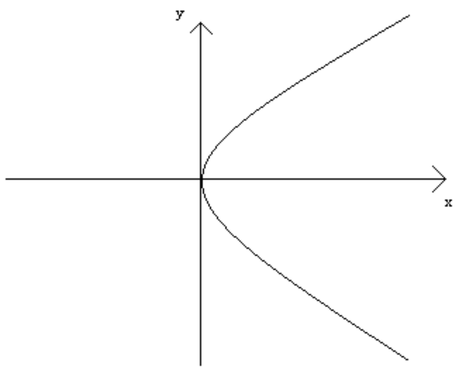


E) Parabola

1. Parabola oblika $y=ax^2$ ima sledeći izgled:



2. Parabola oblika $x=ay^2$ ima sledeći izgled:



DODATAK B
TABLICA IZVODA

$(const)'=0$ $\qquad (\cos x)'=-\sin x$

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $\qquad (tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$ $\qquad (ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)'=e^x$ $\qquad (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $\qquad (\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sin x)'=\cos x$ $\qquad (arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

DODATAK C
TABLICA INTEGRALA

$\int dx = x + c$ $\quad$ c je proizvoqna konstanta

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\quad$ $(n \neq 1)$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ $\quad$ $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\quad$ $\int \sin x dx = -\cos x + c$

$\int \cos x dx = \sin x + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$ $\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + c$

$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = arctgx + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{a + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} arctg \frac{x}{\sqrt{a}} + c$

$\int \frac{dx}{x^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}}\right| + c$

Na pismenom dolazi 5 zadataka. Svaki zadatak nosi 20 poena. Za prolaz je potrebno osvojiti minimum 51 poen. Uglavnom su 4 iz velikih oblasti:

1. Grafik – obavezno - 1. zadatak na pismenom
2. Integral – obavezno - 2. zadatak na pismenom
3. Lokalni ekstrem – često
4. Diferencijalne i diferencne jednačine – često
5. Rešavanje sistema linearnih jednačina (Gaus, Kramer) – često

3. i 4. na pismenom

Peti zadatak je iz malih oblasti. Male oblasti – zadaci:

1. Komutativne matrice
2. Determinanta 4 sa 4
3. Inverzna matrica 3 sa 3
4. Matrične jednačine
5. Rang matrice
6. Bazisni minor
7. Logaritamsko diferenciranje
8. Izvod inverzne funkcije
9. Izvod implicitne funkcije
10. Izvod parametarske funkcije
11. Aproksimativna formula (sin29)
12. Tejlorova i Maklorenova formula
13. Priraštaj i diferencijal funkcije
14. Jednačina tangente i normale
15. Grafik – samo jedna tačka
16. Teorijski zadaci iz funkcija sa dve promenljive
17. Direktna primena parcijalnih izvoda
18. Tejlorova i Maklorenova formula kod funkcija sa dve promenljive
19. Promena poretka integracije kod dvojnih integrala
20. Naći diferencijalnu jednačinu čije je rešenje ...
21. Finansijska matematika
22. Verovatnoća
23. Neprekidnost i diferencijabilnost funkcije
24. Rolova, Lagranžova I Bolcano-Košijeva teorema
25. Nizovi (Bolcano-Vajerštrasova, Lema o 2 policajca, ograničenost, granična vrednost)
26. Redovi (Integralni, poredbeni, Košijev, Dalamberov)
27. Relacije
28. Funkcije (1-1, na, bijekcija, inverzna funkcija)

Na usmenom dolaze 3 teorijska pitanja (svako nosi 33.33 poena) i 3 zadatka (svaki nosi 15 poena).
Student bira da li će da radi zadatak Ili teorijsko pitanje, s tim da može npr. da prvi radi zadatak, a drugi i treći teorijsko pitanje i slično. Uvek su teorijsko pitanje i odgovarajući zadatak iz iste oblasti. Tako student može da kalkuliše, pa ako iz neke oblasti ne zna da radi zadatke, onda da iz te oblasti uči teoriju i obrnuto.

Ako student radi samo zadatke, ne može da položi (45 poena), već mora da radi rezervni zadatak (15 poena). U tom slučaju najveća konačna ocena koju može da dobije je 6.