NAJNOVIJA 2020/2021 god

skripta iz **teorijske statistike** za **pismeni**

autor: **Časlav** Pejdić

(primeri ispitnih i kolokvijumskih zadataka)

SA NAMA MOŽETE SPREMITI ISPIT IZ:

- **MATEMATIKE**
- **OSNOVA EKONOMIJE**
- **STATISTIKE**
- **FINANSIJSKOG RAČUNOVODSTVA**
- **TEORIJE CENA**
- **UPRAVLJAČKOG RAČUNOVODSTVA**
- **MODELA**
- **MATEMATIKE 2**
- **TEORIJSKE STATISTIKE**
- **LSE (MATEMATIKE I STATISTIKE)**
- **RAČUNOVODSTVA TROŠKOVA**
- **FINANSIJSKE MATEMATIKE**
- **ENGLESKOG**

21 godinu sa vama, 50 m od fakulteta,
iskusni predavači, kvalitetne skripte,
klimatizovane učionice**, male grupe (do 8 polaznika)**
BESPLATNO SAVETOVALIŠTE
www.smartbasic.edu.rs, smartbasic@gmail.com
Lomina 5, Beograd, **064/123-09-10**
grupa na fejsu: www.facebook.com/groups/teorijskastatistika/
online prijava na: smartbasic.edu.rs/online-prijava/

KOPIRNICA " MINA" Gavrila Principa 29

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Prvi kolokvijum iz teorijske statistike, 7.4.2017.

III grupa

1. Data je funkcija raspodele dvodimenzionalne prekidne slučajne promenljive (X,Y):
$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0, & x<-2 \vee y<-2\\ \frac{1}{3}, & -2\le x<2 \wedge -2\le y<2\\ \frac{3}{4}, & x\ge 2 \wedge -2\le y<2\\ \frac{3}{4}, & -2\le x<2 \wedge y\ge 2\\ 1, & x\ge 2 \wedge y\ge 2\end{cases}$$
a) Odrediti marginalne funkcije raspodela $F_X(x)$ i $F_Y(y)$.
b) Odrediti: $P\{X<0; 1<Y<3\}$

2. Gustina raspodele slučajne promenljive X data je sa:
$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$
Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive $Y=X^2$.

3. Iz dve nezavisne normalne raspodele sa varijansama $\sigma_1^2=1.16$ i $\sigma_2^2=10.41$, uzeta su dva nezavisna uzorka sa $n_1=10$ i $n_2=13$. Odrediti verovatnoću da je uzoračka varijansa drugog uzorka bar 4 puta veća od uzoračke varijanse prvog uzorka

4. Iz U(0,1) raspodele uzet je prost slučajan uzorak obima n. Odrediti $E\left(X_{(n)}^k\right)$.

Ispit iz teorijske statistike – januar 2017

1. Ako je funkcija gustine slučajnog vektora (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(2xy + 2x + y + 1), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

   Odrediti:

   a) konstantu *a;*

   b) marginalne funkcije gustine

   c) uslovne funkcije gustine i ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Isti kao u knjizi (zadatak 5.6, strana 152)

3. Primenom testa Kolmogorova proveriti na nivou značajnosti od 0,05 da li je uzorak u saglasnosti sa $N(32; 3{,}24)$.

   31; 31,4; 33,3; 33,4; 33,5; 33,7; 34,4; 34,9; 36,2

4. Dati su uzorci:

   I: 3 5 7 10 4 6 7

   II: 5 6 18 22 10 12 4

   Uzorci su iz dve populacije sa varijansama $\sigma_1^2 = 9$ i $\sigma_2^2 = 25$. Testirati hipotezu da je zbir prosečnih prinosa kukuruza ova dva skupa 20.

5. Neka je $F(x,\theta) = \begin{cases} 1 - e^{\theta - x}, & x \geq \theta \\ 0, & inače \end{cases}$

   a) metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka obima *n*.

   b) ispitati nepristrasnost i postojanost dobijene ocene

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Ispit iz teorijske statistike – februar 2017

1. Ako je funkcija gustine slučajnog vektora (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4}, & |x|<1, |y|<1\\ 0, & inače\end{cases}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

2. Neka je $Y\sim\chi^2_n$. Koristeći da je $E\left(\frac{1}{Y}\right)=\frac{1}{n-2}$, pokazati da je za $n>2$:

a) $E(T)=0$ i $V(T)=\frac{n}{n-2}$ za slučajnu promenljivu T koja ima t_n raspodelu.

b) $E(F)=\frac{n}{n-2}$ za slučajnu promenljivu F koja ima $F(m,n)$ raspodelu.

3. Ako je raspodela populacije: $X: B(m,p)$, gde je $0\leq p\leq 1$ nepoznati parametar, a $m\geq 1$ poznati, metodom momenata naći ocenu parametra p .

4. Primer 5.30 iz knjige, str. 134 (30 porodica, štednja)

5. Na osnovu uzorka obima n=74 sa pragom značajnosti $\alpha=0{,}02$ testirati hipotezu da obeležje populacije X ima gustinu:

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\leq x\leq 1\\ 0, inače\end{cases}$$

S_n	[0,1/4)	[1/4,1/2)	[1/2,3/4)	[3/4,1)
M_k	6	18	20	30

Ispit iz teorijske statistike

-jul 2017-

1. Novčić se baca 3 puta. Ukoliko u sva 3 bacanja padne ista strana, izvodi se još jedno dodatno. Opiši prostor elementarnih ishoda Ω i naći raspodelu slučajnog vektora (X,Y) gde je X-broj palih grbova, a Y-broj bacanja. Naći raspodelu koord. X i Y i ispitati nezavisnost.

2. Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajan uzorak iz normalne $N(m, \sigma^2)$ raspodele. Uporediti srednje kvadratne greške sledećih ocena za σ^2 :
   $\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$, $\bar{S}_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$
   ($MSE(T) = E_\theta(T-\theta)^2$).

3. Ako je funkcija gustine $f(x,\theta) = \frac{\theta}{x^2}, x > \theta, \theta > 0$, naći metodom maksimalne verodostojnosti najbolju ocenu parametra θ. Ispitati nepristrasnost i postojanost dobijene ocene.

4. Obeležje X date populacije ima gustinu $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$.
   a) Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje hipoteze $H_0: \theta = 1$ protiv $H_1: \theta > 1$.
   b) Ako je n=100, α=0,05, $H_1: \theta = 2$, naći verovatnoću greške II vrste β.

5. Neki zadatak iz neparametarskih metoda

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Ispit iz teorijske statistike – septembar 2017

1. Ako je funkcija gustine slučajnog vektora (X,Y):
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} a(2xy+2x+y+1), & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

   Odrediti:

   a) konstantu *a;*

   b) marginalne funkcije gustine

   c) uslovne funkcije gustine i ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Neka su Y_1, Y_2, Y_3 uređene statistike slučajnog uzorka od 3 elementa i
$$f(x)=\begin{cases} 2x, 0\le x\le 1 \\ 0, inače \end{cases}$$
   Odrediti $P\{Y_1 \ge u\}, P\left\{Y_3 < \frac{1}{2}\right\}$. (u-medijana)

3. Neka je $f(x,\lambda,\theta)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\ge\theta, \lambda>0 \\ 0, & inače \end{cases}$

   Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocene nepoznatih parametara $\lambda\ i\ \theta$ na osnovu uzorka obima *n*.

4. Obeležje X ima $N(0,\sigma^2)$ raspodelu.

   a) Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje hipoteze $H_0: \sigma^2 = 1$ protiv $H_1: \sigma^2 = 4$.

   b) Ako je n=10, α=0,05, naći verovatnoću greške II vrste β.

5. U uzorku su dobijenI sledeći podaci o broju klijenata usluženih u 5 radnih dana: 60, 73, 48, 56, 78. Ispitati pomoću Pirsonovog χ^2 na nivou značajnosti od 5% da li je srednji broj usluženih lica isti u 5 radnih dana.

Ispit iz teorijske statistike – oktobar 2 2017

1. Iz 2 normalne raspodele uzeta su dva slučajna uzorka $n_1 = 5, n_2 = 10$. Ako je $\sigma_1^2 = 10$, naći σ_2^2, ako je $P(\bar{S}_1^2 > 3\bar{S}_2^2) = 0{,}05$.
2. $X \sim N(2, \sigma^2), n = 10, \sum_1^{10}(x_i - 2)^2 = 0{,}5$. Testirati hipoteze $H_0: \sigma^2 = 0{,}03, H_1: \sigma^2 > 0{,}03$ na nivou značajnosti 0,05.
3. Izračunati 90% interval poverenja za m iz $X \sim N(m, 9)$ ako je uzorak: 2,3,1,5,3,6,5,2,4,3.

4. Uzorak x_1, x_2, x_3, x_4 ima raspodelu $N(m, \sigma^2)$ i $\widehat{m}_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$, $\widehat{m}_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4$. Ispitati da li su ocene nepristrasne i koja je efikasnija?

5. Test Kolmogorova, nivo značajnosti 0,1. Ispitati da li je uzorak 2,3; 3,2; 5; 7,5 iz $U[2,10]$ raspodele.

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Ispit iz teorijske statistike – novembar 2017

1. Neka su $X \sim N(0,1)$ i $Y \sim N(0,1)$ nezavisne slučajne promenljive. Naći zakon raspodele slučajne promenljive $Z = \frac{X}{Y}$.
2. Ako su Y_1, Y_2 statistike poretka uzorka obima 2, iz $U(a, b)$, odrediti $E(Y_1)$
3. Ako je $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzorak iz populacije sa gustinom: $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, \ \theta > 0$, odrediti dovoljnu statistiku za parametar θ.
4. Obeležje X date populacije ima gustinu $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$.

   a) Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje hipoteze $H_0: \theta = 1$ protiv $H_1: \theta > 1$.

   b) Ako je n=100, α=0,05, $H_1: \theta = 2$, naći verovatnoću greške II vrste β.
5. Obeležje X je broj automobila koji u nekom vremenu prođu kroz jedan presek puta. U 200 merenja konstatovano je sledeće:

Broj aut. x_k	0	1	2	3	4
Broj merenja M_k	109	65	22	3	1

Sa nivoom značajnosti $\alpha = 0{,}01$ primenom χ^2 testa testirati hipotezu da X ima Puasonovu raspodelu.

Ispitni rok jun 2018

I grupa

1. Ako je funkcija gustine slučajnog vektora (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} axy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & inače \end{cases}$$

Odrediti:

a) konstantu *a;*

b) Ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Data je slučajna promenljiva X sa raspodelom $U(0,\theta)$.

a) Odrediti metodom momenata ocenu parametra θ

b) Metodom maksimalne verodostojnosti naći nepristrasnu ocenu parametra θ

c) Koja od ove dve ocene je efikasnija?

3. Neka obeležje X populacije ima raspodelu

$$p(k,\theta) = P\{X = k\} = \theta^k (1-\theta)^{1-k}, x > 0, \theta > 0.$$

Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje $H_0: \theta = \frac{1}{4}$, naspram $H_1: \theta = \frac{1}{3}$. Da li postoji uniformno najmoćniji test za $H_0: \theta = \frac{1}{4}$, naspram $H_1: \theta < \frac{1}{4}$.

4. Merenjem vremena (u minutima) potrebnog za izradu predmeta primenom dva tehnološka procesa, dobijeno je:

57, 120, 101, 137, 119, 117, 104, 73, 53, 68, 118;

89, 30, 82, 50, 39, 22, 57, 32, 96, 31, 88.

Testirati hipotezu da su disperzije potrebnih vremena jednake, sa pragom značajnosti $\alpha = 0{,}10$.

5. Isti kao u knjizi 7.5 (Kolmogorov). (Kocka je bacana 15 puta ...).

Ispit iz teorijske statistike – jun 2018

II grupa

Ponovljen rok u celosti iz septembra 2017

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Ispitni rok jul 2018

I grupa

1. Data je raspodela dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y)

Y/X	0	1	2
0	0,1	0	0,2
1	P	0,3	0,1

Odrediti p i naći marginalne raspodele za X i Y i ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Neka je $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{ax^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & inače \end{cases}$

odrediti:

a) konstantu *a*

b) metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka obima *n*, ispitati nepristrasnost dobijene ocene

c) naći jednu nepristrasnu ocenu za θ i ispitati njenu postojanost.

3. Obeležje populacije X ima gustinu $f(x,\theta) = \theta \cdot ln2 \cdot 2^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0$. Naći najbolju kritičnu oblast za test hipoteze $H_0\colon \theta = 1$, naspram $H_1\colon \theta = 2$, za $\alpha = 0{,}05, n = 100$.

4. Dali su 2 uzorka iz 2 populacije sa N rasporedom sa istom varijansom i matematičkim očekivanjem m_1 i m_2:

56, 44, 44, 46, 47, 38, 58, 41, 30, 46, 35, 49,53

39, 51, 57, 41, 42, 39, 32, 29, 40, 47, 55, 35

a) Naći dvostrani interval 95% za $m_1 - m_2$

b) Testirati $H_0\colon m_1 = m_2$, protiv alternativne hipoteze $H_1\colon m_1 \neq m_2$

c) Testirati $H_0\colon m_1 = m_2$, protiv alternativne hipoteze $H_1\colon m_1 > m_2$

5. Primenom χ^2 testa za $\alpha = 0{,}05$ ispitati saglasnost iz uzorka sa N raspodelom:

[1,3]	[3,5]	[5,7]	[7,9]	[9,11]
2	3	7	11	7

Ispit iz teorijske statistike – septembar 2018

1. Ako je funkcija gustine slučajnog vektora (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(2xy + 2x + y + 1), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

   Odrediti:

   a) konstantu *a;*

   b) marginalne funkcije gustine

   c) uslovne funkcije gustine i ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ prost slučajan uzorak iz populacije sa obeležjem X koje ima $P(\theta)$. Metodom maksimalne verodostojnosti na osnovu raspodele slučajne promenljive $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$, naći ocenu θ i ispitati osobine.

3. Obeležje X date populacije ima gustinu $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$.

   a) Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje hipoteze $H_0: \theta = 1$ protiv $H_1: \theta > 1$.

   b) Ako je n=100, α=0,10, $H_1: \theta = 1{,}5$, naći verovatnoću greške II vrste β.

4. Baca se numerisana kocka 96 puta da bi se proverila ispravnost:

Broj koji je pao	1	2	3	4	5	6
Broj pojava	12	17	14	18	18	17

Sa α=0,05 pomoću χ^2 testa testirati hipotezu da je kocka ispravna.

Ispit iz teorijske statistike – oktobar 2018

1. Ako slučajna promenljiva T ima t_n raspodelu, pokazati da slučajna promenljiva T^2 ima F(1,n) raspodelu.

2. Obeležje X ima binomnu $B(m,\theta)$ raspodelu. Na osnovu slučajnog uzorka obima n odrediti jednu dovoljnu statistiku za nepoznat parametar θ. Da li je $\frac{\bar{X}_n}{m}$ dovoljna statistika za θ?

3. a) Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ, na osnovu uzorka obima n iz raspodele čija je funkcija gustine: $f(x,\theta) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx-ln\theta)^2}{2\sigma^2}}$, θ –nepoznati parametar.
   b) Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje hipoteze $H_0\colon \theta = 1$ protiv $H_1\colon \theta > 1$.

4. Merenjem prinosa pšenice na dve parcele (u mc/ha), primenom dve vrste veštačkog đubriva, dobijeno je:
   đubrivo A: 57, 53, 39, 36, 39, 12, 24, 33, 34, 29
   đubrivo B: 53, 44, 11, 19, 32, 31, 19, 24, 30, 30
   Sa nivoom značajnosti $\alpha = 0{,}05$ testirati hipotezu da su varijanse prinosa jednake, protiv alternativne da su prinosi kod đubriva B homogeniji.

5. Na osnovu uzorka obima n=74 sa pragom značajnosti $\alpha = 0{,}02$ testirati hipotezu da obeležje populacije X ima gustinu:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 0, inače \end{cases}$$

S_n	[0,1/4)	[1/4,1/2)	[1/2,3/4)	[3/4,1)
M_k	6	18	20	30

Ispit iz teorijske statistike – novembar 2018

1. Odrediti regresionu pravu Y po X (Y u zavisnosti od X), ako je:

$$f(x,y) = \begin{cases} 15x^2y, 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, inače \end{cases}$$

2. Neka je $X_1, X_2, \dots, X_n$ prost slučajni uzorak iz Puasonove raspodele $P(\lambda)$. Dokazati da je $T = \sum X_k$ dovoljna statistika za parametar λ pomoću Teoreme o faktorizaciji.

3. Slučajna promenljiva X ima Bernulijevu raspodelu sa gustinom raspodele:
$$f(x) = (2 * \theta)^x * (1 - 2 * \theta)^{1-x}, \qquad x = 0,1$$
Na osnovu uzorka od n elemenata naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametra θ i ispitati da li je ocena nepristrasna i postojana.

4. Otpornost žice je normalna slučajna promenljiva sa nepoznatom sredinom m i nepoznatom varijansom σ^2. Da bi se ispitalo da li je varijansa otpornosti žice tipa A veća od varijanse otpornosti žice tipa B pet puta je meren otpor žice tipa A i sedam puta otpor žice tipa B. Dobijene su ispravljene uzoračke varijanse $\widetilde{S_A^2} = 0{,}004, \widetilde{S_B^2} = 0{,}002$. Sa nivoom značajnosti 0,05 testirati $H_0: {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ protiv $H_1: {\sigma_1}^2 > {\sigma_2}^2$.

5. Koristeći test Kolmogorov-Smirnova, sa nivoom značajnosti 0,05 odrediti da li su uzorci: 3.7, 4.2, 1.3, 5.6 i 2.1, 2.7, 5.2, 2.4, 3 uzeti iz iste raspodele.

Ispit iz teorijske statistike – februar 2019

1. Ako je funkcija gustine slučajnog vektora (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a\dfrac{x}{y}, & 0 < x < 1, 1 < y < 3 \\ 0, & inače \end{cases}$$

   Odrediti:
   a) konstantu *a;*
   b) marginalne funkcije gustine
   c) uslovne funkcije gustine i ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Na osnovu slučajnog uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ iz populacije sa raspodelom:
$$p(k,\theta) = (8*\theta)^k * (1-8*\theta)^{1-k}, \qquad k = 0{,}1$$
   naći ocenu maksimalne verodostojnosti nepoznatog parametra θ.
   Ispitati osobine dobijene ocene.

3. Iz populacije sa obeležjem $X \sim P(3)$ izabran je uzorak od n elemenata. Odrediti raspodelu verovatnoća, matematičko očekivanje i varijansu slučajne promenljive $Y = 3\bar{X}_n$, gde je $\bar{X}_n$ sredina uzorka.

4. Broj telefonskih poziva koji dnevno stižu u telefonsku centralu je slučajna promenljiva koja ima Puasonovu raspodelu sa srednjim brojem poziva 89. Izračunati približno verovatnoću da za 37 dana na telefonsku centralu pristigne između 3150 I 3350 poziva.

5. Na osnovu 40 bacanja novčića naći uniformno najjači test sa nivoom značajnosti $\alpha = 0{,}05$ za testiranje hipoteze H_0 da je novčić ispravan, protiv hipoteze H_1 da je novčić neispravan sa verovatnoćom pada glave većom od ½.

Ispit iz teorijske statistike – april 2019

1. Novčić se baca 3 puta. Ukoliko u sva 3 bacanja padne ista strana, izvodi se još jedno dodatno. Opiši prostor elementarnih ishoda Ω i naći raspodelu slučajnog vektora (X,Y) gde je X-broj palih grbova, a Y-broj bacanja. Naći raspodelu koord. X i Y i ispitati nezavisnost.

2. Naći obim uzorka i najbolju kritičnu oblast za $N(\theta, 5000^2)$ za $H_0 : \theta = 30000$, naspram $H_1 : \theta = 35000$. $(\alpha = 0{,}01;\ \beta = 0{,}02)$

3. Ako je funkcija gustine $f(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$, naći metodom maksimalne verodostojnosti najbolju ocenu parametra θ i ispitati nepristrasnost i efikasnost dobijene ocene.

4. Uzorak od 10 elemenata izabran je iz normalne populacije. U uzorku je dobijeno: $\sum_{k=1}^{10} x_k = 34, \sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 138$. Ako se uzorak dopuni sa sledećim elementima: 2,8; 3,5;3.8, za koliko se menja dužina 90% intervala poverenja za nepoznato matematičko očekivanje?

5. Na osnovu uzorka obima n=74 sa pragom značajnosti $\alpha = 0{,}02$ testirati hipotezu da obeležje populacije X ima gustinu:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, inače \end{cases}$$

S_n	[0,1/4)	[1/4,1/2)	[1/2,3/4)	[3/4,1)
M_k	6	18	20	30

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Ispit iz teorijske statistike – jun 2019

1. Data je raspodela dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y)

Y/X	0	1	2
0	0,1	0	0,2
1	P	0,3	0,1

   Odrediti p i naći marginalne raspodele za X i Y i ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

2. Neka je $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{ax^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & inače \end{cases}$

   odrediti:
   a) konstantu *a*
   b) metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka obima *n*, ispitati nepristrasnost dobijene ocene
   c) naći jednu nepristrasnu ocenu za θ i ispitati njenu postojanost.

3. Obeležje populacije X ima gustinu $f(x,\theta) = \theta \cdot ln2 \cdot 2^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0$. Naći najbolju kritičnu oblast za test hipoteze $H_0: \theta = 1$, naspram $H_1: \theta = 2$, za $\alpha = 0{,}05, n = 100$.

4. Dali su 2 uzorka iz 2 populacije sa N rasporedom sa istom varijansom i matematičkim očekivanjem m_1 i m_2:
   56, 44, 44, 46, 47, 38, 58, 41, 30, 46, 35, 49,53
   39, 51, 57, 41, 42, 39, 32, 29, 40, 47, 55, 35
   a) Naći dvostrani interval 95% za $m_1 - m_2$
   b) Testirati $H_0: m_1 = m_2$, protiv alternativne hipoteze $H_1: m_1 \neq m_2$
   c) Testirati $H_0: m_1 = m_2$, protiv alternativne hipoteze $H_1: m_1 > m_2$

5. Primenom χ^2 testa za $\alpha = 0{,}05$ ispitati saglasnost iz uzorka sa N(m,4) raspodelom:

(1,3]	(3,5]	(5,8]	(8,12]	(12,15]	(15,18]
2	3	7	10	11	7

Ispit iz teorijske statistike – jul 2019

1. Ako slučajna promenljiva T ima t_n raspodelu, pokazati da slučajna promenljiva T^2 ima F(1,n) raspodelu.

2. Obeležje X ima binomnu $B(m,\theta)$ raspodelu. Na osnovu slučajnog uzorka obima n odrediti jednu dovoljnu statistiku za nepoznat parametar θ. Da li je $\frac{\bar{X}_n}{m}$ dovoljna statistika za θ?

3. a) Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ, na osnovu uzorka obima n iz raspodele čija je funkcija gustine: $f(x,\theta) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx - ln\theta)^2}{2\sigma^2}}$, θ –nepoznati parametar.
   b) Naći najbolju kritičnu oblast za testiranje hipoteze $H_0{:}\, \theta = 1$ protiv $H_1{:}\, \theta > 1$.

4. Merenjem prinosa pšenice na dve parcele (u mc/ha), primenom dve vrste veštačkog đubriva, dobijeno je:
   đubrivo A: 57, 53, 39, 36, 39, 12, 24, 33, 34, 29
   đubrivo B: 53, 44, 11, 19, 32, 31, 19, 24, 30, 30
   Sa nivoom značajnosti $\alpha = 0{,}05$ testirati hipotezu da su varijanse prinosa jednake, protiv alternativne da su prinosi kod đubriva B homogeniji.

5. U tabeli su dati rezultati testa inteligencije 100 studenata:

IQ	[120,124)	[124,130)	[130,136)	[136,140)
m_k	10	50	35	5

   Ispitati saglasnost podataka sa χ^2 - raspodelom na nivou značajnosti $\alpha = 0{,}01$.

Ispit iz teorijske statistike – septembar 2019

1. Slučajna veličina X ima $U(1,2)$ raspodelu, a slučajna veličina Y ima gustinu $f_Y(y) = 6y(1-y), y \in [0,1]$. Naći raspodelu slučajne veličine $Z = X - Y$.

2. Da li je statistika $\frac{n+1}{n} Y_n$ postojana ocena parametra b u raspodeli obeležja populacije $X \sim U(0,b)$, ako je Y_n maksimum uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ iz date populacije.

3. Obeležje X ima binomnu $B(m,\theta)$ raspodelu. Na osnovu slučajnog uzorka obima n odrediti jednu dovoljnu statistiku za nepoznat parametar θ. Da li je $\frac{\bar{X}_n}{m}$ dovoljna statistika za θ?

4. Za slučajnu promenljivu sa gustinom: $f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1,\ \theta > 0$, naći najmoćniji test za testiranje $H_0: \theta = \theta_0$, naspram $H_1: \theta = \theta_1$, za $\theta_1 > \theta_0$.

5. Na osnovu rezultata testa inteligencije učenika jedne škole dobijeni su podaci:

IQ	(65,75)	(75,85)	(85,95)	(95,105)	(105,115)	(115,125)	(125,135)
A	1	2	10	12	14	11	3

Ispitati saglasnost dobijenih podataka sa normalnim zakonom raspodele primenom testa Kolmogorova za $\alpha = 0{,}01$.

oktobar 2019

(ponovljen septembar 2018 – rok sa 4 zadatka)

Oktobar 2 – 2019

1. Neka je $Y \sim \chi^2_n$. Koristeći da je $E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{1}{n-2}$, pokazati da je za $n > 2$:
   a) $E(T) = 0$ i $V(T) = \frac{n}{n-2}$ za slučajnu promenljivu T koja ima t_n raspodelu.
   b) $E(F) = \frac{n}{n-2}$ za slučajnu promenljivu F koja ima $F(m,n)$ raspodelu.

2. Neka obeležje X ima raspodelu
$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{\theta}{2} & \theta & \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$
   Metodom momenata naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka obima n. Ispitati nepristrasnost i postojanost dobijene ocene.

3. Obeležje X ima Bernulijevu raspodelu
$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$
   Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra p na osnovu uzorka obima n. Ispitati osobine dobijene ocene.

4. Dati su uzorci

31.4	29.9	33.2	34.4	32.0	28.7	26.1	30.3
27.0	32.3	30.4	28.0	26.5	25.5	29.6	27.2

   za koje se pretpostavlja da potiču iz dve populaije u kojima obeležja imaju normalne raspodele sa istom varijansom i matematičkim očekivanjima m_1 i m_2.
   a) Naći 95% dvostrani interval poverenja za razliku $m_1 - m_2$.
   b) Odrediti 90% interval poverenja za količnik varijansi $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

5. Merenjem vrednosti neprekidnih signala iz dva izvora A i B dobijeni su sledeći podaci:

intenzitet	1	2	3	4	5	6	7	8
broj slučajeva izvora A	0	2	14	16	10	5	2	1
broj slučajeva izvora B	2	6	18	14	6	3	1	0

   Primenom testa Kolmogorova i Smirnova sa pragom značajnosti $\alpha = 0{,}01$ testirati hipotezu da oba signala imaju istu raspodelu.

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

Januar 2020

1. Ako je funkcija gustine $f(x) = cx^{\alpha-1}e^{-\beta x}, x > 0$, gde je $\alpha > 0, \beta > 0$, odrediti konstantu c.
2. Slučajna promenljiva X ima Bernulijevu raspodelu sa gustinom raspodele:
$$f(x) = (2 * \theta)^x * (1 - 2 * \theta)^{1-x}, \qquad x = 0,1$$
Na osnovu uzorka od n elemenata naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametra θ i ispitati da li je ocena nepristrasna i postojana.
3. ???
4. ???
5. Po Mendelu fenotipski odnos gena A, B, C i D u F2 generaciji je 9:3:3:1. Iz eksperimenta je dobijeno 128 vrsta elemenata A, 56 vrsta elementa B, 45 elementa C i 15 elementa D. Na nivou značajnosti od 5% testirati da li eksperiment opisuje teoriju Mendela.

februar 2020

(ponovljen oktobar 2 - 2017)

april 2020

(ponovljen septembar - 2019)

jun 2020

(ponovljen septembar - 2018)

Ukoliko Vam za bilo koji zadatak treba pomoć, slobodno pozovite. Postoji mogućnost kompletnog kursa, kao i individualnih časova. Zadatke prikupio i otkucao: Časlav Pejdić – 064/123-09-10.

jul 2020

1. Neka su Y_1, Y_2, Y_3 uređene statistike slučajnog uzorka od 3 elementa i
$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 0, inače \end{cases}$$
Odrediti $P\{Y_1 < m\}, P\left\{Y_3 < \frac{1}{2}\right\}$. (m-medijana)
2. Ako slučajna promenljiva T ima t_n raspodelu, pokazati da slučajna promenljiva T^2 ima F(1,n) raspodelu.
3. Na osnovu uzorka od k elemenata iz binomne raspodele $B(n,p)$, gde je n poznati parametar, naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametra p.
4. Obeležje populacije X ima gustinu $f(x,\theta) = \alpha(\theta) \cdot 2^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0$. Naći najbolju kritičnu oblast za test hipoteze $H_0: \theta = 1$, naspram $H_1: \theta = 2$, za $\alpha = 0{,}05, n = 100$.
5. Na osnovu uzorka obima n=74 sa pragom značajnosti $\alpha = 0{,}02$ testirati hipotezu da obeležje populacije X ima gustinu:
$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 0, inače \end{cases}$$

S_n	[0,1/4)	[1/4,1/2)	[1/2,3/4)	[3/4,1)
M_k	6	18	20	30

septembar 2020

(ponovljen april - 2019)

Jedina promena je u 4. zadatku. On je izgledao ovako:

Uzorak od 10 elemenata izabran je iz normalne populacije. U uzorku je dobijeno: $\sum_{k=1}^{10} x_k = 34, \sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 138$. Ako se uzorak dopuni sa sledećim elementima: 2,8; 3,5;3.8, 3.2, 3.4 za koliko se menja dužina 90% intervala poverenja za nepoznato matematičko očekivanje?