

## Ispitna pitanja

1. Definisati opšti oblik funkcije tražnje i funkcije tražnje u užem smislu;
2. Definisati i objasniti uslov normalnosti funkcije tražnje;
3. Formulirati normalne jednačine za određivanje parametara linearne funkcije tražnje;
4. Definisati koeficijent lučne elastičnosti i koeficijent elastičnosti u tački;
5. Osnovne karakteristike elastičnosti;
6. Dokazati da je koeficijent elastičnosti stepene funkcije tražnje konstantan;
7. Formulirati i objasniti koeficijente parcijalne elastičnosti tražnje;
8. Definisati funkciju ponude i objasniti uslov normalnosti funkcije ponude;
9. Analitički i grafički predstaviti parcijalni pristup analizi tržišne ravnoteže;
10. Analitički definisati funkciju ukupnog prihoda;
11. Definisati marginalni (granični) prihod i uspostaviti zavisnost ukupnog i graničnog prihoda;
12. Dokazati i objasniti Amoroso-Robinsonovu relaciju;
13. Analitički i grafički definisati funkciju ukupnih troškova;
14. Definisati funkciju prosečnih troškova i odrediti interval opadajućih prosečnih troškova;
15. Definisati funkciju graničnih (marginalnih) troškova i grafički i analitički predstaviti odnos prosečnih i graničnih troškova;
16. Definisati i objasniti elastičnost ukupnih i prosečnih troškova;
17. Analitički i grafički definisati i objasniti interval rentabiliteta i optimalan nivo proizvodnje;
18. Osnovna struktura redova čekanja;
19. Klasifikacija redova čekanja;
20. Tokovi događaja;
21. Poasonov tok događaja;
22. Raspodela verovatnoća između dva dolaska;
23. Raspodela verovatnoća vremena usluživanja;
24. Proces rađanja i umiranja;
25. Otvoreni jednodimenzionalni model redova čekanja;
26. Analiza troškova za jednodimenzionalni otvoreni model redova čekanja;
27. Troškovi zaliha;
28. Model zaliha sa konstantnom tražnjom i fiksnim vremenskim periodom;
29. Osnovne pretpostavke modela sa konstantnom tražnjom i fiksnim vremenskim periodom;
30. Određivanje funkcije ukupnih troškova za model zaliha sa konstantnom tražnjom i fiksnim vremenskim periodom;
31. Optimizacija troškova za model zaliha sa konstantnom tražnjom i fiksnim vremenskim periodom – analitička interpretacija;
32. Optimizacija troškova za model zaliha sa determinističkom tražnjom i fiksnim vremenskim periodom – grafička interpretacija;
33. Proširenje osnovnog modela zaliha sa konstantnom tražnjom – analitička interpretacija;
34. Proširenje osnovnog modela zaliha sa determinističkom tražnjom – grafička interpretacija;
35. Model zaliha sa konstantnom tražnjom i hitnim nabavkama;
36. Osnovne pretpostavke modela zaliha sa hitnim nabavkama;
37. Određivanje funkcije ukupnih troškova za model sa hitnim nabavkama;

38. Optimizacija modela zaliha sa hitnim nabavkama;
39. Poređenje modela zaliha sa hitnim nabavkama i modela zaliha kad hitne nabavke nisu dozvoljene;
40. Definisati opšti oblik modela matematičkog programiranja – šta predstavlja skup dopustivih rešenja, a šta optimalno rešenje zadatka;
41. Definisati i objasniti osnovne pretpostavke modela linearnog programiranja;
42. Definisati standardni problem maksimuma zadatka linearnog preogramiranja – glavni elementi i karakteristike standardnog problema;
43. Opšte osobine rešenja linearnog programiranja – dokazati i objasniti;
44. Simpleks metod – izvesti simpleks kriterijum za ulazak vektora  $A_j$  u bazu;
45. Simpleks metod – izvesti simpleks kriterijum za izlazak vektora  $A_i$  iz baze;
46. Mešoviti problem maksimuma modela linearnog programiranja – analitički i grafički formulisati i objasniti;
47. Problem minimuma modela linearnog programiranja – analitički i grafički formulisati i objasniti;
48. Formulisati dualni model zadatka linearnog programiranja i definisati osnovne karakteristike;
49. Definisati vezu promenljivih primarnog i dualnog modela zadatka linearnog programiranja – način određivanja optimalnog rešenja dualnog problema;
50. Odnos između vrednosti funkcije cilja primarnog i dualnog modela zadatka linearnog programiranja – dokazati i objasniti;
51. Odnos između optimalnih vrednosti funkcije cilja primarnog i dualnog modela zadatka linearnog programiranja – dokazati i objasniti;
52. Odnos između optimalnih vrednosti promanljivih primarnog i dualnog problema u modelu linearnog programiranja – dokazati i objasniti;
53. Ekonomsko značenje dualnih promenljivih – dokazati i objasniti;
54. Osnovne karakteristike i značaj primene Simpleks tabele – postupak određivanja elemenata simpleks tabele;
55. Problem degeneracije zadatka linearnog programiranja – uzroci i posledice;
56. Jedinstveno i višestruko optimalno rešenje u modelu linearnog programiranja – grafička i analitička interpretacija;
57. Nepostojanje mogućih rešenja i neograničena vrednost funkcije cilja zadatka linearnog programiranja – grafička i analitička interpretacija;
58. Postoptimalna analiza u linarnom programiranju – promena koeficijenata funkcije kriterijuma;
59. Postoptimalna analiza u linearnom programiranju – promena kolone u matrici  $A$ ;
60. Definisati opšti oblik transportnog problema – analitički i tabelarno;
61. Egzistencija mogućeg rešenja transportnog problema – dokazati i objasniti;
62. Pokazati da je rang matrice koeficijenata sistema ograničenja transportnog problema  $m + n - 1$ ;
63. Postojanje zavisnosti između jednačina sistema ograničenja transportnog problema – dokazati i objasniti;
64. Metodi određivanja početnog bazičnog rešenja programa transporta;
65. Metodi optimizacije programa transporta;
66. Degeneracija problema transporta;
67. Model asignacije – osnovne karakteristike i algoritam za rešavanje modela;
68. Otvoreni model transportnog problema
69. Matrične igre – osnovne karakteristike i postupak njihovog rešavanja;
70. Matrične igre sa mešovitim strategijama;

71. Odnos donje i gornje granice vrednosti matrice igre – dokazati i objasniti;
72. Metodi rešavanja matricnih igara – analitički i grafički;
73. Redukcija matrice plaćanja – dominantna i dominirana strategija;
74. Matrice igre i linearno programiranje;
75. Analiza strukture u mrežnom planiranju;
76. Mrežni dijagram i njegovi osnovni elementi;
77. Osnovna pravila konstrukcije mrežnog dijagrama;
78. Međusobni odnosi aktivnosti;
79. Postupak konstrukcije mrežnog dijagrama (objasniti na proizvoljno izabranom primeru);
80. Numerisanje mrežnog dijagrama – Fulkersonov algoritam;
81. Primena Fulkersonovog algoritma na proizvoljno odabranom primeru;
82. Određivanje najranije mogućeg i najkasnije dozvoljenog vremena realizacije događaja primenom metoda CPM;
83. Vremenske rezerve u determinističkom mrežnom modelu;
84. Vremenski parametri stohastičkog mrežnog modela;
85. Kritične aktivnosti i kritičan put u stohastičkom mrežnom modelu;
86. Određivanje verovatnoća u stohastičkom mrežnom modelu;
87. Analiza troškova aktivnosti;
88. PERT/TROŠKOVI (PERT/COST) – metoda
89. Objasniti primenu PERT/COST – metoda na proizvoljno odabranom primeru;
90. Analiza troškova projekta i formiranje matematičkog modela;
91. Osnovne karakteristike metoda dinamičkog programiranja i Belmanov princip optimalnosti;
92. Određivanje najkraćeg puta u neorijentisanoj mreži primenom metoda dinamičkog programiranja;
93. Određivanje najkraćeg i najdužeg puta u orijentisanoj mreži između dva zadata čvora;
94. Raspodela ograničenih resursa primenom metoda dinamičkog programiranja;
95. Definisati i objasniti vektor  $S$  i matricu  $P$  u modelu za prognoziranje opredeljenja potrošača;
96. Markovljev model – osnovne pretpostavke i formulacije modela;
97. Definisati i objasniti stabilno-ravnotežno stanje Markovljevog modela;
98. Markovljev model za prognoziranje opredeljenja potrošača;
99. Markovljev model za određivanje konačnog stanja potraživanja u preduzeću;
100. Definisati i objasniti fundamentalnu matricu  $F$  i matricu  $K$  u modelu za određivanje konačnog stanja potraživanja u preduzeću;

## ODGOVORI

1. Definisati opšti oblik funkcije tražnje i funkcije tražnje u užem smislu;

*Tražnja – količina robe koju su kupci spremni da kupe u određenom vremenu.*

*Opšti oblik funkcije tražnje može se izraziti u vidu  $q_i = g(p_i, p_j, D, n, m)$*

*$q_i$  – tražnja za  $i$ -tim proizvodom*

*$p_i$  – cena  $i$ -tog proizvoda*

*$p_j$  – cena ostalih proizvoda*

*$D$  – dohodak potrošača*

*$n$  – ukus potrošača*

*$m$  – broj potrošača*

*Funkciju tražnje u užem smislu možemo predstaviti u obliku  $q = f(p)$  -*

*Maršalova funkcija tražnje.*

*Ovakav oblik funkcije tražnje izražava funkcionalnu zavisnost kretanja tražnje za nekom robom samo od cene te robe. Ispitivanje kretanja ovakvog oblika funkcije tražnje podrazumeva zadovoljenje sledećih pretpostavki:*

- nepromenjenost ostalih determinanti tražnje*
- postojanje savršene konkurencije na tržištu*
- puna informisanost potrošača o ceni i kvalitetu robe*
- homogenost posmatrane robe*

2. Definisati i objasniti uslov normalnosti funkcije tražnje;

*Funkcija tražnje mora ispunjavati uslov normalnosti. Prema uslovu normalnosti tražnje kretanje tražnje i cene je divergentno, odnosno povećanje cene posmatrane robe izaziva smanjenje tražnje i obrnuto. Ovaj zahtev se izražava zahtevom za negativnom vrednošću prvog izvoda funkcije tražnje, što*

*znači da funkcija tražnje mora ispuniti uslov prema kome je  $\frac{\partial q}{\partial p} < 0$*

*Osim uslova normalnosti, odabrani matematički oblik funkcije tražnje mora zadovoljiti i ekonomske uslove  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$  tj. zavisna i nezavisna promenljiva moraju biti nenegativne.*

3. Formulirati normalne jednačine za određivanje parametara linearne funkcije tražnje;

*Da bi odredili eksplicitan oblik funkcije tražnje koja najbolje aproksimira zavisnost tražnje od cene potrebno je na osnovu empirijskih podataka odrediti parametre odabrane funkcije. Parametre ( $a, b, c, \dots$ ) najčešće određujemo korišćenjem metoda najmanjih kvadrata. Prema ovom metodu odabrana funkcija mora zadovoljiti uslov da zbir kvadrata vertikalnih odstupanja empirijskih vrednosti tražnje od odgovarajućih vrednosti na krivoj mora biti*

$$\text{minimalan } \sum_{i=1}^n (q_i - \hat{q}_i)^2 = \min ,$$

*gde je  $q_i$  –  $i$  ta vrednost iz tabele od  $n$  parova, a  $\hat{q}_i$  – odgovarajuća vrednost na krivoj funkcije.*

Za linearni oblik tražnje

$$q = ap + b \quad a < 0, b > 0$$

uslov najmanjih kvadrata možemo predstaviti u obliku

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n (q_i - ap_i - b)^2 = \min.$$

Minimizacija vrednosti  $F(a, b)$  zavisi od parametara  $a$  i  $b$ , što se izražava kroz uslov da funkcija  $F(a, b)$  ima prve parcijalne izvode jednake nuli:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0,$$

na osnovu čega dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (q_i - ap_i - b)(-p_i) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (q_i - ap_i - b)(-1) = 0$$

odakle dobijamo tzv. normalne jednačine za određivanje parametara:

$$\sum_{i=1}^n q_i = a \sum_{i=1}^n p_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i = a \sum_{i=1}^n p_i^2 + b \sum_{i=1}^n p_i$$

odakle su rešenje po  $a$  i  $b$ :

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n q_i}{n \sum_{i=1}^n p_i^2 - (\sum_{i=1}^n p_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n q_i - a \sum_{i=1}^n p_i}{n}$$

#### 4. Definisati koeficijent lučne elastičnosti i koeficijent elastičnosti u tački;

Elastičnost tražnje koja pokazuje odnos relativne promene tražnje i relativne promene cene, izražava se preko koeficijenta elastičnosti tražnje. Ovaj koeficijent se može odrediti na dva načina:

1. Koeficijent lučne elastičnosti

2. Koeficijent elastičnosti u tački

1. Koeficijent lučne elastičnosti izračunava se za unapred poznate intervale kretanja cene i odgovarajućih iznosa tražnje. Ukoliko raspolažemo sa tabelom podataka o kretanju cene nekog proizvoda i odgovarajućih iznosa tražnje, tada elastičnost tražnje u intervalu  $(i-1, i)$  utvrđujemo na sledeći način:

Relativni priraštaj tražnje određujemo iz količnika apsolutnog priraštaja tražnje i njene početne vrednosti:

$$r_g = \frac{\Delta q_i}{q_{i-1}}, \quad \text{gde je } \Delta q_i = q_i - q_{i-1},$$

a relativna promena cene je

$$r_p = \frac{\Delta p_i}{p_{i-1}}, \quad \text{gde je } \Delta p_i = p_i - p_{i-1}.$$

Koeficijent elastičnosti tražnje za ovako utvrđeni interval kretanja cene i tražnje određujemo u vidu negativne vrednosti količnika njihovih relativnih

promena. tj.:

$$\eta = -\frac{r_q}{r_p} = -\frac{\frac{\Delta q_i}{q_{i-1}}}{\frac{\Delta p_i}{p_{i-1}}} = -\frac{p_{i-1}(q_i - q_{i-1})}{q_{i-1}(p_i - p_{i-1})}$$

U izrazu za koeficijent elastičnosti negativni predznak je uzet zbog divergentnog kretanja cene i tražnje. Na taj način obezbeđuje se da je koeficijent elastičnosti tražnje uvek pozitivna vrednost.  $\eta$  pokazuje za koliko će se procenata promeniti tražnja za posmatranim proizvodom ukoliko se cena promeni za 1%.

2. Koeficijent elastičnosti u tački pokazuje odnos relativne promene tražnje i relativne promene cene za infinitezimalno malu promenu tih veličina. On se određuje u vidu granične vrednosti količnika relativne promene tražnje i relativne promene cene kada  $\Delta p \rightarrow 0$  tj.

$$\eta = -\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = -\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{p}{q} \frac{\Delta q}{\Delta p}, \text{ odnosno } \eta = -\frac{p}{q} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}.$$

Kako je  $\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{dq}{dp} \Rightarrow \eta = -\frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$ , gde je znak minus uzet zbog inverznog kretanja cene i tražnje.

## 5. Osnovne karakteristike elastičnosti

U zavisnosti od vrednosti koeficijenta elastičnosti tražnje za nekim proizvodom za određenu cenu možemo imati različite karakteristike elastičnosti, odnosno:

- $\eta < 1 \Rightarrow$  tražnja je neelastična, tj. promeni cene za 1% odgovara promena tražnje za manje od 1%;
- $\eta = 1 \Rightarrow$  tražnja je jedinično elastična, tj. promeni cene za 1% odgovara promena tražnje za 1%;
- $\eta > 1 \Rightarrow$  tražnja je elastična, tj. promena cene od 1% dovodi do promene tražnje za više od 1%;
- $\eta = 0 \Rightarrow$  tražnja je savršeno neelastična.

## 6. Dokazati da je koeficijent elastičnosti stepene funkcije tražnje konstantan

U slučaju stepenog oblika funkcije tražnje vrednost koeficijenta elastičnosti tražnje ne zavisi od vrednosti cene, tj. konstantno je jer:

$$q = ap^b$$

$$\eta = -\frac{p}{q} \cdot q' = -\frac{p}{ap^b} \cdot bap^{b-1} = -b.$$

Dakle koeficijent elastičnosti tražnje stepene funkcije tražnje  $q = ap^b$  je konstantan i jednak negativnoj vrednosti parametra izložioca  $b$ .

7. Formulirati i objasniti koeficijente parcijalne elastičnosti tražnje

*Parcijalna elastičnost tražnje se koristi kada je odnose tražnje i tržišne zavisnosti dva ili više proizvoda moguće izraziti preko odgovarajućeg sistema funkcija tražnje. Parcijalnu elastičnost tražnje pokazaćemo za slučaj u kome postoji međusobna zavisnost kretanja tražnje i cene dva proizvoda. Ovaj odnos predstavimo sistemom funkcija tražnje oblika:*

$$q_1 = f_1(p_1, p_2)$$

$$q_2 = f_2(p_1, p_2)$$

*gde su  $q_1, q_2$  – tražnje posmatranih proizvoda, a  $p_1, p_2$  – njihove cene.*

*Koeficijent parcijalne elastičnosti tražnje je:*

$$\eta_{ij} = \frac{p_j}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_j}$$

*Ukoliko je  $i = j$  imamo takozvani koeficijent direktne parcijalne elastičnosti koji se uzima sa negativnim predznakom.*

*Za  $i \neq j$  imamo tzv. koeficijent ukrštene parcijalne elastičnosti čija vrednost može biti pozitivna i negativna. Pozitivna vrednost pokazuje da su proizvodi supstituti, a negativna da su proizvodi komplementarni.*

8. Definisati funkciju ponude i objasniti uslov normalnosti funkcije ponude

*Ponuda nekog proizvoda zavisi od cene tog proizvoda, cene drugih proizvoda, cene sirovina i poluproizvoda, dohotka potrošača. Kao i kod funkcije tražnje i kod funkcije ponude cena je odlučujuća determinanta količine ponude, pa stoga funkcija ponude će biti:  $r = f(p)$ .*

*Uslov normalnosti je  $\frac{\partial r}{\partial p} > 0$ , a osim uslova normalnosti postoje i ekonomski*

*uslovi  $r \geq 0$  i  $p \geq 0$ .*

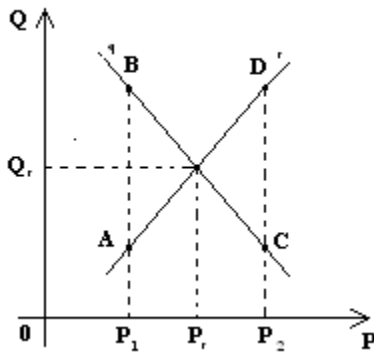
*Ponuda nekog proizvoda raste kada raste njegova cena, jer funkcija ponude ima rastući karakter.*

*Tako na primer linearna funkcija  $r = ap + b$  može predstavljati funkciju ponude samo ako je  $r > 0, a > 0, ap > -b$ .*

*Cena za koju se ostvaruje jednakost tražnje i ponude predstavlja ravnotežnu cenu posmatranog proizvoda.*

9. Analitički i grafički predstaviti parcijalni pristup analizi tržišne ravnoteže

*Zbog suprotnog kretanja tražnje i ponude, njihove funkcije se moraju seći u određenoj tački, tj. tražnja i ponuda se moraju izjednačiti za određenu cenu. Cena za koju se ostvaruje jednakost ponude i tražnje predstavlja ravnotežnu cenu.*



Ravnotežna cena  $P_r$  je cena za koju je  $q(P_r) = r(P_r) = Q_r$ . Ovo je stabilna cena za koju se ostvaruje stabilnost tržišta. Ukoliko je cena na tržištu manja od ravnoteže  $P_1 < P_r$ , onda je  $q > r$  za veličinu AB. U tom slučaju kupci su spremni da prihvate veću cenu da bi došli do proizvoda. Suprotno, ako je  $P_2 > P_r$ , onda je  $q < r$ , pa tada proizvođači neće moći da prodaju svoj proizvod po toj ceni, pa obaraju cenu i to dovodi do cene za koju je  $q = r$ .

10. Analitički definisati funkciju ukupnog prihoda

Ukupan prihod se utvrđuje iz proizvoda prodate količine robe i cene tog proizvoda:  $R = pq$  odnosno  $R = p \cdot f(p)$ .

$R$  – ukupan prihod

$p$  – cena

$f(p)$  – funkcija tražnje.

Kako za svaku funkciju tražnje možemo odrediti odgovarajuću inverznu funkciju oblika  $p = g(q)$ , ukupan prihod možemo izraziti u obliku funkcije oblika tražnje, tj.  $R = q \cdot g(q)$ .

11. Definirati marginalni (granični) prihod i uspostaviti zavisnost ukupnog i graničnog prihoda

Granični (marginalni) prihodi, koji pokazuju iznos priraštaja ukupnog prihoda do koga dolazi pri povećanju cene posmatranog proizvoda za jednu jedinicu, ispituju se i iskazuju preko funkcije graničnog prihoda. Funkciju graničnog prihoda ( $R'$ ) izražavamo u obliku izvoda funkcije ukupnog prihoda:

$$R = p \cdot f(p) \Rightarrow R' = \frac{dR}{dp}$$

$$R = q \cdot f(q) \Rightarrow R' = \frac{dR}{dq}$$

Utvrđivanjem znaka prvog izvoda možemo da utvrdimo promenu ukupnog prihoda koja je izazvana promenom cene. Tako imamo da:

1)  $\frac{dR}{dp} > 0 \Rightarrow$  ukupan prihod raste sa porastom cene

2)  $\frac{dR}{dp} = 0 \Rightarrow$  ispituje se ekstremna vrednost (max) ukupnog prihoda

3)  $\frac{dR}{dp} < 0 \Rightarrow$  ukupan prihod opada sa porastom cene.

12. Dokazati i objasniti Amoroso-Robinsonovu relaciju

Na osnovu relacije  $R = p \cdot f(p)$  imamo da je  $\frac{dR}{dp} = f(p) + p \cdot f'(p)$ , odnosno

$$\frac{dR}{dp} = f(p) \left[ 1 + \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p) \right]. \text{ Kako je}$$

$$\frac{p}{f(p)} \cdot f'(p) = -\eta \Rightarrow \frac{dR}{dp} = f(p)[1 - \eta].$$

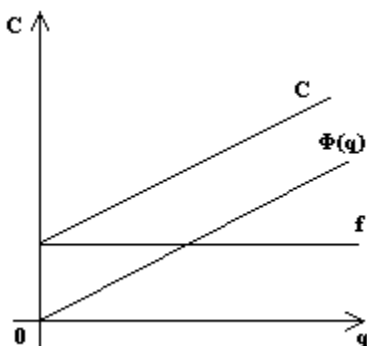
Dobijena relacija koja služi za uspostavljanje veze između graničnog prihoda ( $R'$ ) i elastičnosti tražnje ( $\eta$ ), predstavlja tzv. Amoroso-Robinsonovu relaciju, na osnovu koje možemo zaključiti sledeće:

- $\eta < 1 \Rightarrow \frac{dR}{dp} > 0$ , što znači da sa porastom cene raste i ukupan prihod
- $\eta = 1 \Rightarrow \frac{dR}{dp} = 0$ , što znači da se u uslovima jedinične elastičnosti ostvaruje maksimalan ukupan prihod
- $\eta > 1 \Rightarrow \frac{dR}{dp} < 0$ , što znači da sa porastom cene ukupan prihod opada.

13. Analitički i grafički definisati funkciju ukupnih troškova

Ukupni troškovi prevashodno zavise od obima proizvodnje ( $q$ ). Ukupne troškove možemo izraziti u obliku  $C=f(q)$ . Funkcija troškova je monotono rastuća, neprekidna i diferencijabilna.

Ukupni troškovi se dele na varijabilne i fiksne, pri čemu varijabilni troškovi predstavljaju funkciju obima proizvodnje, dok su fiksni troškovi konstantni. Funkcija ukupnih troškova je:  $C = \phi(q) + f$ , gde su  $\phi(q)$  – varijabilni troškovi, a  $f$  – fiksni troškovi.



- Fiksni troškovi su prikazani horizontalnom pravom  $f$
- Kriva ukupnih troškova polazi iz tačke preseka prave  $f$  sa ordinatom, na osnovu čega je očigledno da je  $C(0) = f$ , tj. da fiksni troškovi postoje i kad je  $q = 0$ .

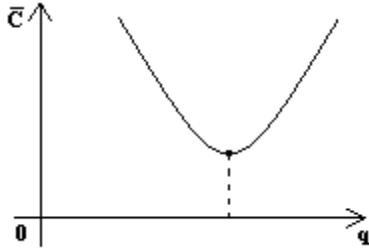
14. Definisati funkciju prosečnih troškova i odrediti interval opadajućih prosečnih troškova

Kako prosečne troškove određujemo deljenjem ukupnih troškova sa obimom

proizvodnje, tako na osnovu funkcije ukupnih troškova možemo odrediti funkciju prosečnih troškova. Funkcija prosečnih troškova je:

$$\bar{C} = \frac{C}{q} = \frac{F(q)}{q}$$

Zbog podele ukupnih troškova na varijabilne i fiksne, prosečni troškovi do određenog nivoa opadaju, a zatim rastu. Zbog toga je za proizvođača veoma interesantno utvrditi te intervale u kretanju prosečnih troškova, odnosno utvrditi nivo proizvodnje za koji se ostvaruju minimalni prosečni troškovi.



Obim proizvodnje za koji se ostvaruju minimalni prosečni troškovi određujemo iz uslova za ostvarivanje minimuma funkcije, tj. na osnovu

$$\bar{C} = \frac{F(q)}{q}, \text{ imamo da je } \bar{C}' = \frac{F'(q) \cdot q - F(q)}{q^2} = 0, \text{ dakle prosečni troškovi su}$$

$$\text{minimalni za } q = \frac{F(q)}{F'(q)}.$$

Interval opadajućih prosečnih troškova određen je granicama kretanja obima proizvodnje  $0 \leq q \leq \frac{F(q)}{F'(q)}$ .

Za ovaj iznos je zadovoljen i dovoljan uslov za minimizaciju funkcije  $\bar{C}$ , jer je drugi izvod pozitivan  $\frac{d^2 \bar{C}}{dq^2} > 0$ .

15. Definisati funkciju graničnih (marginalnih) troškova i grafički i analitički predstaviti odnos prosečnih i graničnih troškova

Funkcija graničnih troškova određuje se kao prvi izvod funkcije ukupnih troškova, pod uslovom da je funkcija ukupnih troškova diferencijabilna u posmatranom intervalu kretanja obima proizvodnje. Tako za  $C = F(q)$  funkcija graničnih troškova je  $C' = F'(q)$ . Ova funkcija pokazuje iznos promene ukupnih troškova do koje dolazi usled jedinične promene obima proizvodnje sa datog nivoa.

Obim proizvodnje za koji se ostvaruju minimalni prosečni troškovi možemo

odrediti na osnovu relacije  $q = \frac{F(q)}{F'(q)}$ , odnosno minimizacija prosečnih

troškova se ostvaruje na nivou proizvodnje koji je jednak količniku ukupnih i graničnih troškova. Za takav obim proizvodnje važi  $F'(q) = \frac{F(q)}{q}$ , što znači

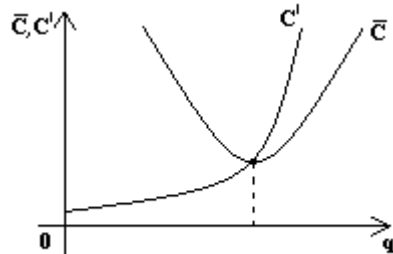
da se za obim proizvodnje za koji su  $\bar{C}$  minimalni ostvaruje jednakost graničnih i prosečnih troškova. Ovaj obim predstavlja granicu između relativno niskih i relativno visokih graničnih troškova. Na osnovu tog odnosa

možemo izvesti sledeći važan zaključak:

a) ako je  $C' < \bar{C}$ , granični troškovi su relativno niski, tj. povećanje  $q$  dovodi do smanjenja  $\bar{C}$

b) ako je  $C' = \bar{C}$ , prosečni troškovi su minimalni

c) ako je  $C' > \bar{C}$ , granični troškovi su relativno visoki, tj. povećanje  $q$  dovodi do povećanja  $\bar{C}$ .



#### 16. Definisati i objasniti elastičnost ukupnih i prosečnih troškova

Elastičnost ukupnih troškova je odnos relativne promene ukupnih troškova i relativne promene obima proizvodnje sa datog nivoa u obliku  $\frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{\Delta q}{q}$ ,

$$\text{odnosno } \frac{q}{C} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{q}{C} \cdot \frac{dC}{dq}.$$

Granična vrednost ovog izraza kada  $\Delta q \rightarrow 0$  predstavlja koeficijent elastičnosti ukupnih troškova:

$$\eta_C = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{q}{C} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{q}{C} \cdot C'.$$

Ovaj koeficijent pokazuje za koliko procenata će se povećati  $C$  ukoliko se  $q$  poveća za 1%.

Elastičnost prosečnih troškova je  $\eta_{\bar{C}} = \frac{q}{C} \cdot \bar{C}'$ , čijim se određivanjem utvrđuje

relativna promena  $\bar{C}$ , do koje dolazi usled promene  $q$  za 1%. Vrednost  $\eta_{\bar{C}}$  može biti pozitivna, negativna i jednaka nuli. Negativna je kad imamo divergentan odnos  $\bar{C}$  i  $q$ , a pozitivna kad sa povećanjem  $q$   $\bar{C}$  rastu.

Između  $\eta_C$  i  $\eta_{\bar{C}}$  postoji zavisnost. Iz elastičnosti  $\bar{C}$  imamo  $\eta_{\bar{C}} = \frac{q}{C} \cdot \bar{C}'$ ,

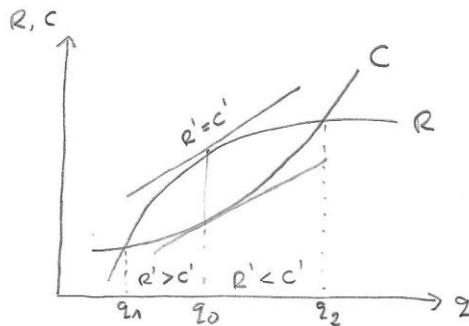
$$\text{odnosno } \eta_{\bar{C}} = \frac{q}{C} \cdot \left( \frac{C}{q} \right)' = \frac{q^2}{C} \cdot \frac{C'q - C}{q^2} = \frac{C'q - C}{C} = \frac{q}{C} \cdot C' - 1 = \eta_C - 1.$$

Dakle,  $\eta_{\bar{C}} = \eta_C - 1$ , pa izračunavanjem bilo kojeg koeficijenta elastičnosti možemo utvrditi i njemu odgovarajući koeficijent.

#### 17. Analitički i grafički definisati i objasniti interval rentabiliteta i optimalan nivo proizvodnje

Rentabilna je ona proizvodnja za koju je  $\pi > 0$ , odnosno  $R > C$ , pri čemu su

granice intervala proizvodnje određene jednakošću  $R=C$ . Granice intervala rentabiliteta određene su nulama funkcije profita, tj. tačkama u kojima se seku krive  $R$  i  $C$ . Optimalni nivo proizvodnje se određuje iz uslova  $\pi'=0$ , odakle je  $R'=C'$ , tj. optimalan nivo proizvodnje je onaj za koji su tangente krivih  $R$  i  $C$  paralelne. Interval rentabiliteta se ostvaruje za  $q_1 < q < q_2$ , pri čemu je optimalan nivo proizvodnje  $q_0$ . U intervalu  $q_1 < q < q_0$  imamo da je  $R' > C'$ , a u intervalu  $q_0 < q < q_2$ , da je  $R' < C'$ . U intervalu  $0 < q < q_1$  i  $q > q_2$ , proizvodnja je nerentabilna, tj. ostvaruje se gubitak.



40. Definisati opšti oblik modela matematičkog programiranja – šta predstavlja skup dopustivih rešenja, a šta optimalno rešenje zadatka

Opšti oblik modela matematičkog programiranja možemo predstaviti u obliku zahteva za određivanjem vrednosti promenljivih  $x_1, x_2, \dots, x_n$  koje zadovoljavaju  $m$  nejednačina i jednačina oblika:

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i \rightarrow$  sistem ograničenja  
 i za koje se ostvaruje max ili min vrednost funkcije:

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow$  funkcija cilja.

Ukoliko sistem ograničenja i funkciju cilja predstavimo u razvijenom obliku, model matematičkog programiranja je:

$$(\max) z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$g_1(x) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

...

$$g_m(x) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

uz pretpostavku za određivanje max. vrednosti funkcije cilja  $z$ , u uslovima kada su sva ograničenja predstavljena nejednačinama sa znakom  $\leq$ .

Sve vrednosti promenljivih  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  za koje su zadovoljene sve nejednačine sistema ograničenja obrazuju tzv. skup dopustivih ili mogućih rešenja. Cilj rešavanja zadatka matematičkog programiranja jeste određivanje one kombinacije vrednosti promenljivih iz skupa mogućih rešenja za koje funkcija cilja ostvaruje ekstremnu vrednost. Takvo rešenje koje obeležavamo sa  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , predstavlja optimalno rešenje zadatka matematičkog programiranja.

41. Definisati i objasniti osnovne pretpostavke modela linearnog programiranja

*Pretpostavke koje moraju biti zadovoljene da bi određeni model predstavljao model linearnog programiranja su:*

- 1) *Linearnost – podrazumeva postojanje linearnih zavisnosti između promenljivih u zadatku linearnog programiranja. Ova pretpostavka je zadovoljena tako što su funkcija cilja i sistemi ograničenja izraženi linearnim funkcijama u modelu linearnog programiranja. Kao posledica linearnosti u modelu linearnog programiranja zadovoljene su dve pretpostavke:*
  - a) *proporcionalnost- podrazumeva postojanje proporcionalnog odnosa inputa i outputa u modelu linearnog programiranja*
  - b) *aditivnost- podrazumeva da se ukupna vrednost funkcije cilja i pojedinih ograničenja može dobiti kao zbir vrednosti pojedinih aktivnosti koje predstavljaju sastavne elemente linearnog programiranja.*
- 2) *izvesnost – svi parametri modela su unapred jednoznačno određeni, što znači da su koeficijenti funkcije cilja i sistema ograničenja deterministički određeni i ne menjaju se u toku rešavanja*
- 3) *deljivost – podrazumeva da promenljive u modelu ne moraju biti celi brojevi već mogu biti izražene i u obliku decimalnih brojeva*
- 4) *nenegativnost – uslov nenegativnosti promenljivih predstavlja jednu od osnovnih pretpostavki modela. Ova pretpostavka ima svoj metodološki i ekonomski značaj. Metodološki – kako je opšti algoritam rešavanja modela (simpleks metod), to je za njegovu primenu neophodno zadovoljenje uslova nenegativnosti. Ekonomski – kako promenljive u modelu predstavljaju ekonomske veličine one ne mogu biti negativne.*

42. Definisati standardni problem maksimuma zadatka linearnog programiranja – glavni elementi i karakteristike standardnog problema

*Standardni problem max je takav oblik modela linearnog programiranja u kome se postavlja zahtev za određivanjem max vrednosti unapred poznate funkcije cilja, pod uslovima koji su predstavljeni sistemom nejednčina sa znakom  $\leq$ . Zadatak standardnog problema max predstavljamo na sledeći način:*

$$\begin{aligned}
 (\max) z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p &\leq b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p &\leq b_2 \\
 &\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p &\leq b_m \\
 x_1, x_2, \dots, x_p &\geq 0
 \end{aligned}$$

*Osnovni elementi modela:*

- a) *funkcija cilja – izražava osnovni cilj koji se unapred definiše i radi koga se formuliše i rešava odgovarajući model linearnog programiranja. Kao cilj se može postaviti maksimizacija ukupnog profita, maksimizacija deviznih efekata i maksimalni stepen zaposlenosti i sl.*
- b) *sistem ograničenja – izražava uslove i način korišćenja ograničenih resursa, čiji je iznos izražen slobodnim članovima sistema ograničenja, tj.*

parametrima  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .

c) uslov nenegativnosti – mora biti zadovoljen jer nijedna delatnost ne može biti negativna

U cilju određivanja rešenja problema sistem nejednačina moramo transformisati u sistem jednačina. To ćemo uraditi tako što ćemo levoj strani svake nejednačine dodati tzv. dodatnu promenljivu, koja je jednaka razlici desne i leve strane nejednačine. Nakon toga sistem ograničenja možemo predstaviti u obliku:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + x_{p+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + x_{p+2} &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p + x_{p+m} &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{p+m} &\geq 0 \end{aligned}$$

Uvedene dodatne promenljive osim metodološke uloge u pretvaranju sistema nejednačina u sistem jednačina, imaju veoma značajan ekonomski značaj prilikom rešavanja zadatka linearnog programiranja jer pozitivne vrednosti dodatnih promenljivih pokazuju iznos neiskorišćenih resursa.

Osim u sistemu ograničenja dodatne promenljive se uvode u funkciju cilja nakon čega će kompletan oblik problema biti:

$$\begin{aligned} (\max) z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p + c_{p+1}x_{p+1} + \dots + c_{p+m}x_{p+m} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + x_{p+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + x_{p+2} &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p + x_{p+m} &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{p+m} &\geq 0 \end{aligned}$$

Znači, imamo  $p$  realnih (osnovnih) i  $m$  dodatnih promenljivih. Dodatne promenljive u funkciju cilja su uvedene sa nulnim vrednostima koeficijenata, tj.  $c_{p+1} = c_{p+2} = \dots = c_{p+m} = 0$ , što znači da se u funkciju cilja uvode isključivo iz metodoloških razloga. Ako prihvatimo da je  $c_{p+m} = 0$ , problem možemo izraziti u kraćem obliku na sledeći način:

$$\begin{aligned} (\max) z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{aligned} (\max) z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$x$  - vektor kolona promenljivih  
 $c$  – vektor vrsta koeficijenata funkcije cilja n-tog reda  
 $A$  – matrica koeficijenata sistema ograničenja reda  $(m, n)$   
 $b$  – vektor kolona slobodnih članova ograničenja m-tog reda

43. Opšte osobine rešenja linearnog programiranja – dokazati i objasniti

Sve vrednosti promenljivih za koje su zadovoljene nejednačine (jednačine) sistema ograničenja predstavljaju tzv. moguća rešenja, odnosno obrazuju skup mogućih rešenja. Kako su ograničavajući uslovi standardnog problema max dati u obliku nejednačina sa znakom  $\leq$ , odnosno u kanoničnom obliku u vidu jednačina, skup mogućih rešenja je ograničen i zatvoren skup. Skup mogućih rešenja može biti prazan skup u slučaju kada su postavljeni uslovi kontradiktorni, odnosno kada ne postoji ni jedna tačka  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  za koju su zadovoljeni svi uslovi zadatka.

**Teorema 1:** Skup mogućih rešenja zadatka linearnog programiranja je konveksan skup.

**Dokaz:** Da bi dokazali tvrđenje naše teoreme, potrebno je da pokažemo da konveksna kombinacija svaka dva moguća rešenja predstavlja moguće rešenje. Zbog toga uzmimo da  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  i

$x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  predstavljaju moguća rešenja problema na osnovu čega je

$$Ax' = b \text{ i } Ax'' = b$$

$$x = \lambda x' + (1 - \lambda)x'', \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\begin{aligned} Ax &= A[\lambda x' + (1 - \lambda)x''] = \lambda Ax' + (1 - \lambda)Ax'' = \lambda Ax' + Ax'' - \lambda Ax'' = \\ &= \lambda b + b - \lambda b = b \end{aligned}$$

na osnovu čega vidimo da sve konveksne kombinacije mogućih rešenja takođe predstavljaju moguća rešenja. Prema tome, skup mogućih rešenja je konveksan, što je trebalo i dokazati.

Bazično moguće rešenje  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  predstavlja optimalno rešenje zadatka standardnog problema max ukoliko imamo da je  $z(x^*) \geq z(x')$  za bilo kojke moguće rešenje  $x'$ .

**Teorema 2:** Optimalno rešenje zadatka linearnog programiranja nalazi se u ekstremnoj tački konveksnog skupa mogućih rešenja.

**Dokaz:** Kako je skup mogućih rešenja konveksan i ograničen skup  $\Rightarrow$  postoji konačan broj ( $k$ ) ekstremnih tačaka, koje ćemo označiti sa  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Neka je  $x^*$  tačka za koju funkcija cilja ostvaruje max, odnosno za koju imamo da je  $z(x^*) \geq z(x)$  za svako moguće rešenje  $x$ . Ako je  $x^*$  ekstremna tačka konveksnog skupa mogućih rešenja teorema je dokazana.

Pretpostavimo da  $x^*$  nije ekstremna tačka skupa mogućih rešenja. Tada tačku  $x^*$  možemo izraziti kao konveksnu kombinaciju skupa ekstremnih tačaka,

$$tj. x^* = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k \quad \lambda_i \geq 0 \text{ i } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad i=(1, \dots, k)$$

$$z(x^*) = z(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \dots + \lambda_k z(x_k)$$

Ako u poslednjoj jednačini izaberemo tačku za koju funkcija  $z$  ostvaruje max vrednost, npr.  $x_k$ , tada možemo pisati

$$\lambda_1 z(x_k) + \lambda_2 z(x_k) + \dots + \lambda_k z(x_k) \geq \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \dots + \lambda_k z(x_k) = z(x^*)$$



$$(\max) z = \sum_{j=1}^{p+m} c_j x_j$$

odnosno

$$\sum_{j=1}^{p+m} A_j x_j = b \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p + m)$$

Postupak određivanja optimalnog rešenja problema započinjemo određivanjem tzv. početnog bazičnog rešenja. Ono se određuje tako što se pretpostavlja da su sve realne promenljive jednake nuli, a dodatne promenljive jednake slobodnim članovima sistema ograničenja, t.j.

$$x_j = 0 \quad \text{za} \quad j = 1, \dots, p$$

$$x_{p+i} = b_i \quad \text{za} \quad i = 1, \dots, m \quad \text{a funkcija cilja } z = 0.$$

Znači: vektorsku bazu na osnovu koje se utvrđuje početno bazično rešenje obrazuju vektori koeficijenata uz dodatne promenljive, dok su vektori koeficijenata uz realne promenljive nebazični. Vektori koeficijenata uz dodatne promenljive obrazuju jediničnu matricu, čija inverzna matrica je takođe jedinična, što predstavlja osnovni razlog za otpočinjanje simpleks procedure za rešavanje zadataka.

Vektore koji obrazuju vektorsku bazu možemo pisati u obliku:

$$\sum_{i=p+1}^{p+m} A_i x_i = b \quad (i = p + 1, \dots, p + m) \quad x_i \geq 0$$

a za nebazične vektore:

$$\sum_{j=1}^p A_j x_j = 0 \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, p)$$

dok je funkcija cilja za početno bazično rešenje jednaka nuli:  $z = \sum_{i=p+1}^{p+m} c_i x_i$ .

Svaki od nebazičnih vektora možemo izraziti u obliku linearne kombinacije

vektora baze:  $A_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} A_i$ , gde je  $x_{ij}$  – koeficijent lin kombinacije.

Za svaki nebazični vektor  $A_j$  možemo odrediti vrednost funkcije  $z_j$  u obliku

$$z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$$

Kriterijum za ulazak vektora u bazu:

$$z = \sum_{i=p+1}^{p+m} c_i x_i \quad z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$$

$$z - \rho \cdot z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} c_i x_i - \rho \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$$

$$z - \rho(z_j - c_j) = \sum_{i=p+1}^{p+m} (x_i - \rho \cdot x_{ij}) c_i + \rho \cdot c_j$$

Ako desnu stranu obeležimo sa  $z'$ , tj:  $z' = \sum_{i=p+1}^{p+m} (x_i - \rho \cdot x_{ij}) c_i + \rho \cdot c_j$ , dobijamo:

$$z' = z + \rho(c_j - z_j) = z + \rho \cdot \Delta z'$$

$\Delta z'$  – povećanje vrednosti funkcije cilja do koje je došlo uključivanjem u bazu

vektora  $A_j$ . Ukoliko je vrednost  $\Delta z' = (c_j - z_j)$  veća, povećanje vrednosti funkcije cilja će biti veće uz pretpostavke da je  $\Delta z' > 0$ . Na osnovu toga kriterijum za uključivanje jednog od prethodno nebazičnih vektora u bazu sastoji se u tome da treba odabrati onaj vektor kod koga je zadovoljen uslov:  $c_i - z_i = \max_j (c_j - z_j) > 0$  i to je I simpleks kriterijum za izmenu vektorske baze. Ukoliko je za svako  $j$ ,  $c_j - z_j < 0$  takvo rešenje je optimalno.

45. Simpleks metod – izvesti simpleks kriterijum za izlazak vektora  $A_i$  iz baze

$$\sum_{i=p+1}^{p+m} A_i x_i = b \Rightarrow \sum_{i=p+1}^{p+m} A_i x_i - \rho \cdot A_j + \rho \cdot A_j = b$$

$$\text{Kako je: } A_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} A_i \Rightarrow \sum_{i=p+1}^{p+m} A_i x_i - \rho \cdot \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} A_i + \rho \cdot A_j = b$$

$$\text{Dakle: } \sum_{i=p+1}^{p+m} (x_i - \rho \cdot x_{ij}) \cdot A_i + \rho \cdot A_j = b \quad b \geq 0 \text{ i } \rho \text{ mora biti } > 0.$$

$$(x_i - \rho \cdot x_{ij}) \geq 0, \text{ odakle imamo } \rho \leq \frac{x_i}{x_{ij}}, \text{ za } x_{ij} > 0.$$

Iz baze treba isključiti onaj  $k$ -ti vektor  $A_k$  za koga bude zadovoljen uslov:

$$\rho = \frac{x_k}{x_{ki}} = \min \frac{x_i}{x_{ij}}, \text{ za } x_{ij} \geq 0 \text{ i ovo predstavlja II Dantzigov simpleks}$$

kriterijum.

46. Mešoviti problem maksimuma modela linearnog programiranja – analitički i grafički formulisati i objasniti

*Ukoliko su u sistemu ograničenja problema max., osim nejednačina sa znakom  $\leq$ , neki od uslova zadatka predstavljeni jednačinama ili nejednačinama sa znakom  $\geq$ , takav oblik problema nazivamo mešoviti problem maksimuma. Da bismo objasnili suštinsku i metodološku razliku ovakvog oblika zadatka u odnosu na standardni problem maksimuma, posmatrajmo sledeći oblik problema:*

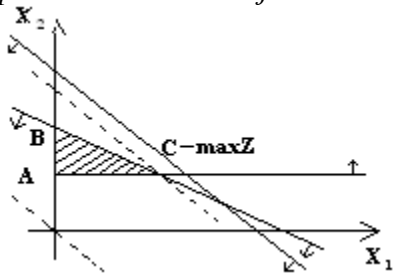
$$\begin{aligned} (\max) z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1p} x_p &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2p} x_p &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kp} x_p &= b_k \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mp} x_p &\geq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_p &\geq 0 \end{aligned}$$

*Prilikom transformisanja ograničavajućih uslova mešovitih problema maksimuma, osim dodatnih, u sistem se uvode i tzv. veštačke promenljive. Veštačke promenljive uvode se u jednačine, dok se u nejednačine sa znakom  $\geq$*

uvode i dodatne i veštačke promenljive. Osim u sistem ograničenja, veštačke promenljive se uvode i u funkciju cilja i to sa koeficijentima koji su jednaki negativnoj vrednosti broja  $M$ , pri čemu je  $M$  veliki konačan broj. Nakon uvođenja dodatnih i veštačkih promenljivih problem možemo predstaviti:

$$\begin{aligned}
 (\max) z &= c_1 x_1 + \dots + c_p x_p + 0 \cdot x_{p+1} + 0 \cdot x_{p+2} + \dots + 0 \cdot x_{p+m} - M \cdot x_{p+k,M} - \dots - M \cdot x_{p+m,M} \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + x_{p+1} &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + x_{p+2} &= b_2 \\
 \dots & \\
 a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kp}x_p + x_{p+k,M} &= b_k \\
 \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p - x_{p+m} + x_{p+m,M} &= b_m \\
 x_1, x_2, \dots, x_{p+m,M} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Veštačke promenljive za razliku od dodatnih nemaju nikakvo suštinsko značenje, već predstavljaju isključivo metodološki postupak neophodan za određivanje početnog bazičnog rešenja, mešovitog problema  $\max$  i na taj način otpočinjanja simpleks postupka rešavanja zadataka. Osim toga veštačke promenljive se ne mogu naći u optimalnom rešenju. Eliminisanje veštačkih promenljivih iz baze obezbeđeno je njihovim uvođenjem u svojstvu cilja sa koeficijentom  $-M$ . Ako se ipak pojavi u optimalnom rešenju, to znači da problem nema rešenje.



47. Problem minimuma modela linearnog programiranja – analitički i grafički formulisati i objasniti

Problem minimuma predstavlja takav oblik modela linearnog programiranja u kome se postavlja zahtev za određivanje minimalne vrednosti unapred poznate funkcije cilja, uz respektovanje zadatih ograničenja, predstavljenih u obliku sistema jednačina i nejednačina.

Standardni problem minimuma je takav model linearnog programiranja u kome je sistem ograničenja predstavljen isključivo nejednačinama oblika  $\geq$ . Mešoviti problem minimuma pored nejednačina oblika  $\geq$ , uključuje i jednačine, kao i nejednačine sa znakom  $\leq$ . Prilikom transformisanja sistema ograničavajućih uslova u sistem jednačina, radi primene simpleks metoda u nejednačine sa znakom  $\leq$  uvodimo samo dodatne promenljive, u jednačine uvodimo samo veštačke promenljive, a u nejednačine sa znakom  $\geq$  uvodimo i dodatne i veštačke promenljive.

Problem minimuma možemo predstaviti u sledećem obliku:

$$(\min)z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_p \geq 0$$

Uvođenjem dodatnih promjenljivih, sistem nejednačina transformišemo u sistem jednačina:

$$(\min)z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p + 0 \cdot x_{p+1} + 0 \cdot x_{p+2} + \dots + 0 \cdot x_{p+m}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p - x_{p+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p - x_{p+2} = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p - x_{p+m} = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{p+m} \geq 0$$

Na osnovu ovog modela nismo u mogućnosti da direktno odredimo početno bazično rešenje problema minimuma. Ako bismo pošli od toga da su realne promjenljive jednake nuli, vrednosti bazičnih promjenljivih bi bile negativne, zbog čega ne bi mogli odrediti optimalno rešenje korišćenjem simpleks postupka. Zbog toga se i uvode veštačke promjenljive, čiji vektori obrazuju jediničnu matricu. Osim u sistem ograničenja veštačke promjenljive uvodimo i u svojstvu cilja pri čemu su njihovi koeficijenti pozitivni  $+M$ .

Nakon uvođenja veštačkih promjenljivih problem je:

$$(\min)z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p + 0 \cdot x_{p+1} + 0 \cdot x_{p+2} + \dots + 0 \cdot x_{p+m} + M(x_{p+1,M}, \dots, x_{p+m,M})$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p - x_{p+1} + x_{p+1,M} = b_1$$

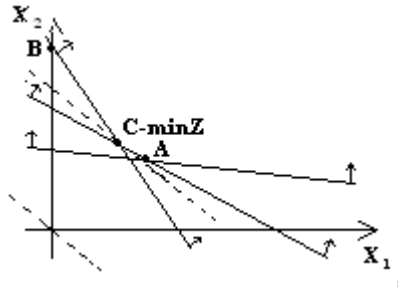
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p - x_{p+2} + x_{p+2,M} = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p - x_{p+m} + x_{p+m,M} = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{p+m,M} \geq 0$$

Početno bazično rešenje određuje se na osnovu pretpostavke da su realne dodatne promjenljive jednake nuli, dok su veštačke promjenljive jednake slobodnim članovima sistema ograničenja. Postupak određivanja optimalnog rešenja je sličan kao kod problema max. uz suprotan I simpleks kriterijum  $MIN(c_j - z_j) < 0$ . Rešenje je optimalno kada su sve razlike  $c_j - z_j \geq 0$ .



48. Formulirati dualni model zadatka linearnog programiranja i definisati osnovne karakteristike

*Dualni problem određenog zadatka linearnog programiranja formira se:*

1. ukoliko primarni problem predstavlja problem maksimuma, funkcija cilja duala će biti funkcija minimuma i obrnuto.
2. menja se smer znakova nejednakosti u sistemu nejednačina i to tako da ukoliko su nejednačine primara sa znakom  $\leq$ , nejednačine duala će biti sa znakom  $\geq$  i obrnuto.
3. Vršiti se transponovanje matrice koeficijenata ograničenja primara, na osnovu čega ukoliko u primaru  $m$  nejednačina sa  $p$  promenljivih u dualu će biti  $p$  nejednačina sa  $m$  promenljivih.
4. Koeficijenti uz promenljive u funkciji cilja duala jednaki su sa slobodnim članovima sistema ograničenja primara.
5. Slobodni članovi sistema nejednačina duala jednaki su koeficijentima koji se uz promenljive nalaze u funkciji cilja primara.
6. Sve promenljive duala moraju biti nenegativne ( $\geq 0$ ).

*Posmatrajmo osnovni oblik standardnog problema maksimuma:*

$$\begin{aligned}
 (\max) t &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1p} x_p &\leq b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2p} x_p &\leq b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mp} x_p &\leq b_m \\
 x_1, x_2, \dots, x_p &\geq 0
 \end{aligned}$$

*Dualni problem koji odgovara standardnom problemu max:*

$$\begin{aligned}
 (\min) v &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \\
 a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m &\geq c_1 \\
 a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m &\geq c_2 \\
 &\dots \\
 a_{1p} y_1 + a_{2p} y_2 + \dots + a_{mp} y_m &\geq c_p \\
 y_1, y_2, \dots, y_m &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 (\max) z = \sum_{j=1}^p c_j x_j & (\min) v = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, \dots, p) \\
 x_j \geq 0 & y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)
 \end{array}$$

*Osnovne karakteristike: Svakom problemu linearnog programiranja odgovara dualni problem. Između primara i duala postoji inverzni odnos u pogledu zahteva za određivanjem ekstremne vrednosti funkcije cilja. Osim toga nejednačine ograničenja duala izvode se na osnovu nejednačina ograničenja. Primarne i dualne promenljive omogućavaju dobijanje značajnih informacija o karakteru optimalnog rešenja.*

*S obzirom da određivanje optimalnog rešenja bilo kog zadatka linearnog programiranja, istovremeno znači određivanje optimalnog rešenja njegovog duala, moguće je njihovo alternativno korišćenje za postupak rešavanja zadatka. Ovakva mogućnost dolazi do izražaja u situaciji kada je neki problem linearnog programiranja jednostavnije rešavati korišćenjem njemu odgovarajućeg duala.*

49. Definisati vezu promenljivih primarnog i dualnog modela zadatka linearnog programiranja – način određivanja optimalnog rešenja dualnog problema

*Između promenljivih primarnog i dualnog problema postoji povezanost i međusobna uslovljenost rešenja. Da bi to pokazali uvedimo primarni problem – problem maksimuma dodatne promenljive  $x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$  i njemu odgovarajući dualni problem  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+p}$  i izrazimo ih u kanoničnom obliku:*

$$\begin{array}{ll}
 (\max) z = \sum_{j=1}^p c_j x_j & (\min) v = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j + x_{p+i} = b_i & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \\
 x_j \geq 0, x_{p+i} \geq 0 & y_i \geq 0, y_{m+j} \geq 0
 \end{array}$$

*Broj promenljivih u primarnom i dualnom problemu sada je jednak i iznosi  $p+m$ . Veza između promenljivih primara i duala može se izraziti na sledeći način: Svakoju dodatnoj promenljivoj primara odgovara realna promenljiva duala u obliku:*

$$\begin{array}{l}
 x_{p+1} \rightarrow y_1 \\
 x_{p+2} \rightarrow y_2 \\
 \dots \\
 x_{p+m} \rightarrow y_m
 \end{array}$$

dok svakoj realnoj promenljivi primara odgovara jedna dodatna duala:

$$x_1 \rightarrow y_{m+1}$$

$$x_2 \rightarrow y_{m+2}$$

...

$$x_p \rightarrow y_{m+p}$$

Na osnovu iskazane relacije možemo konstatovati da rešavajući jedan iz navedenog para zadatka, određivanjem optimalnog rešenja jednog od njih, dobijamo i optimalno rešenje njemu odgovarajućeg duala. Optimalno rešenje duala na osnovu već izračunatog optimalnog rešenja primara, možemo odrediti na dva načina:

1. Optimalne vrednosti realnih promenljivih duala  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ )

određujemo kao negativnu vrednost razlike  $I$  simpleks kriterijuma za dodatne promenljive poslednjeg rešenja primarnog problema, tj.

$$y_i = -(c_{p+i} - z_{p+i}) \quad i = (1, \dots, m)$$

2. Na osnovu optimalnog rešenja primara, optimalne vrednosti realnih promenljivih duala  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), određujemo iz relacije:  $y = C_B \alpha_{opt}^{-1}$ , gde je  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , vektor vrsta koeficijenata koji se u funkciji cilja primara nalaze uz promenljive iz optimalne baze  $\alpha_{opt}$ .

50. Odnos između vrednosti funkcije cilja primarnog i dualnog modela zadatka linearnog programiranja – dokazati i objasniti

*Teorema 3: Za bilo koje moguće rešenje  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  primarnog problema i bilo koje moguće rešenje dualnog problema  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , vrednost funkcije cilja primarnog problema manja je ili jednaka vrednosti funkcije cilja dualnog problema, tj.  $z(x) \leq v(y)$  ili  $\sum_{j=1}^p c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$ .*

*Dokaz: Posmatrajmo sistem ograničenja primara  $\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i$  i duala*

*$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$  i pomnožimo sada desnu i levu stranu  $i$ -te nejednačine sistema*

*ograničenja primara sa  $y_i$  i sumirajmo po indeksu  $i=1, \dots, m$ , na osnovu čega*

*dobijamo:  $\sum_{i=1}^m (a_{i1} x_1 + \dots + a_{ip} x_p) \cdot y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$ .*

*Izraz na levoj strani prethodne nejednačine možemo predstaviti u obliku dvostruke sume po  $i=1, \dots, m$  i po  $j=1, \dots, p$  i dobićemo:*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

*Ako  $j$ -tu nejednačinu sistema ograničenja duala pomnožimo sa  $x_j$  i sumiramo po  $j=1, \dots, p$  dobijamo:*

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j \geq \sum_{j=1}^p c_j x_j.$$

Kako su leve strane poslednje dve nejednačine jednake konstatujemo da je:

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

51. Odnos između optimalnih vrednosti funkcije cilja primarnog i dualnog modela zadatka linearnog programiranja – dokazati i objasniti

*Teorema 4: Ukoliko su  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$  i  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  moguća rešenja primarnog i dualnog problema, za koje su vrednosti funkcija cilja primara i duala jednake  $z(x^*) = v(y^*)$ , tada su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja primara i duala respektivno.*

*Dokaz: Neka je  $x'$  neko moguće rešenje primara. Tada će biti  $z(x') \leq v(y^*)$ .*

*Međutim, kako je na osnovu uslova teoreme  $z(x^*) = v(y^*)$ , to je*

*$z(x') \leq z(x^*)$ . Kako je  $x'$  bilo koje moguće rešenje primara, to je*

*$z(x^*) = (\max) z(x)$ , odnosno  $x^*$  predstavlja optimalno rešenje primarnog problema.*

*Analogno se dokazuje da  $y^*$  predstavlja optimalno rešenje dualnog problema.*

*Teorema 5: Ukoliko jedan od problema linearnog programiranja primarni ili dualni problem – imaju makar jedno moguće rešenje, tada i primarni i dualni problem imaju optimalna rešenja.*

*Dokaz: Neka primarni i dualni problem imaju optimalna rešenja oblika*

*$x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$  i  $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$  to znači da je  $z(x^*) = (\max) z(x)$  za svako*

*$x$  iz konveksnog skupa mogućih rešenja  $K$  ( $x \in K$ ), kao i  $v(y^*) = (\min)v(y)$  za svako  $y$  iz konveksnog skupa mogućih rešenja dualnog problema  $L$  ( $y \in L$ ).*

*Znači skupovi  $K$  i  $L$  nisu prazni.*

*Da bi dokazali teoremu neophodno je dokazati da ovi problemi imaju*

*optimalna rešenja. Da bi to pokazali posmatrajmo rešenje duala  $y^*$  i*

*proizvoljno moguće rešenje  $x$  primara. Na osnovu teoreme 3 imamo da je*

*$z(x) \leq v(y^*)$ . Ukoliko  $x$  predstavlja proizvoljno rešenje primara tada*

*korišćenjem simpleks metoda u nizu iteracija možemo odrediti niz rešenja*

*$x_1, x_2, \dots, x_r$  takvih da je  $z(x_1) < z(x_2) < \dots < z(x_r)$  pri čemu postoji gornja*

*granica povećanja vrednosti funkcije cilja primara. Možemo utvrditi da takvo*

*rešenje  $x^*$  primara za koje je  $z(x^*) \geq z(x)$  za svako  $x \in K$ , što znači da*

*primar ima optimalno rešenje.*

*Sličan postupak se primenjuje i u dokazivanju da dualni problem ima*

*optimalno rešenje  $y^*$  za koje je  $v(y^*) \leq v(y)$   $y \in L$ .*

*Teorema 6: Moguće rešenje  $x^*$  primara je optimalno ako i samo ako postoji*

*moguće rešenje duala  $y^*$  za koje je  $z(x^*) = v(y^*)$ . Tada rešenje  $y^*$*

*predstavlja optimalno rešenje duala.*

*Dokaz: Pretpostavimo da  $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$  i  $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$  predstavljaju optimalna rešenja primara i duala. Tada na osnovu teoreme 3 imamo za bilo koje moguće rešenje  $x = (x_1, \dots, x_p)$  primara da je:*

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^p c_j x_j^*, \text{ na osnovu čega konstatujemo da}$$

*$x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$  predstavlja optimalno rešenje primara. Slično za bilo koje moguće rešenje  $y = (y_1, \dots, y_m)$  duala imamo da važi*

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \geq \sum_{j=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^p c_j x_j^*. \text{ Dakle, vidimo da } y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*) \text{ predstavlja}$$

*optimalno rešenje duala.*

*Na osnovu prethodnih konstatacija možemo zaključiti da  $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$  i  $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$  predstavljaju optimalna rešenja primara i duala za koje je  $z(x^*) = v(y^*)$ .*

52. Odnos između optimalnih vrednosti promenljivih primarnog i dualnog problema u modelu linearnog programiranja – dokazati i objasniti

*Teorema 7: Ukoliko su  $x^*$  i  $y^*$  moguća rešenja primara i duala, tada su to i optimalna rešenja akko imamo zadovoljene uslove:*

$$1) y_i^* = 0 \text{ ukoliko je } \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* < b_i$$

$$2) x_j^* = 0 \text{ ukoliko je } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j,$$

*odnosno dualna promenljiva je jednaka nuli  $y^* = 0$  kada je njoj odgovarajuća dodatna promenljiva pozitivna u optimalnom rešenju primara, odnosno realna promenljiva je jednaka nuli  $x^* = 0$  kada je njoj odgovarajuća dodatna promenljiva u optimalnom rešenju duala pozitivna.*

*Dokaz: Pretpostavimo da  $x^*$  i  $y^*$  predstavljaju optimalna rešenja primara i duala. Za optimalna rešenja važe nejednakosti:*

$$\begin{array}{ll} \text{primar } \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \leq b_i & \text{dual } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j \\ x_j \geq 0 & y_i \geq 0 \end{array}$$

*Pomnožimo levu i desnu stranu primaru nenegativnom vrednošću  $y_i^*$ :*

$$y_i^* \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \leq y_i^* b_i. \text{ Sumirajući levu i desnu stranu dobijamo}$$

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \leq \sum_{i=1}^m y_i^* b_i, \text{ odnosno } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i^* x_j^* \leq \sum_{i=1}^m y_i^* b_i.$$

*Pomnožimo sada levu i desnu stranu duala sa  $x_j^*$ ,  $x_j^* \geq 0$ :*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i^* x_j^* \geq \sum_{j=1}^p c_j x_j^*.$$

Na osnovu teoreme 4 u kojoj smo dokazali  $\sum_{j=1}^p c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$ , imamo:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i^* x_j^* \leq \sum_{i=1}^m y_i^* b_i = \sum_{j=1}^p c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i^* x_j^*.$$

S obzirom da su krajnje sume jednake, možemo pisati

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i^* x_j^* = \sum_{i=1}^m y_i^* b_i \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^p c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i^* x_j^*.$$

Dobijene jednakosti možemo predtaviti u obliku

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \left[ b_i - \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^p x_j^* \left[ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right] = 0$$

Imajući u vidu nenegativnost primarnih i dualnih promenljivih imamo

$$y_i^* \left[ b_i - \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \right] = 0$$

$$x_j^* \left[ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right] = 0$$

Iz njih vidimo da ukoliko je  $b_i - \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \geq 0$  odnosno  $\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j^* \leq b_i$ , onda je

jednakost zadovoljena samo za  $y_i^* = 0$ , a iz  $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \geq 0$ , odnosno

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j, \text{ jednakost je zadovoljena samo za } x_j^* = 0.$$

Na taj način smo dokazali našu teoremu.

### 53. Ekonomsko značenje dualnih promenljivih – dokazati i objasniti

Dualne promenljive pružaju mogućnost za dobijanje veoma značajnih informacija o karakteru problema linearnog programiranja, kao i ispitivanje uticaja promene nivoa korišćenja raspoloživih resursa na vrednost funkcije cilja. Posmatrajmo problem standardnog max:

$$\begin{array}{ll} (\max) z = cx & (\min) v = b' y \\ Ax \leq b & \text{i njegov dual} \quad A' \cdot y \geq c' \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

Neka  $x^*$  predstavlja optimalno rešenje primara za koje je

$z(x^*) = (\max) z(x) \quad \forall x \in K$  i neka je  $y^*$  optimalno rešenje duala za koje je

$v(y^*) = (\min) v(y) \quad \forall y \in L$ . Pretpostavimo da se elementi vektora  $b$  primara

povećaju za iznos  $\Delta b$ , koji ne izaziva promenu strukture optimalne baze.

Promena vrednosti elemenata vektora  $b$  dovešće do povećanja vrednosti

funkcije cilja primara za iznos od  $\Delta z(x^*) = y^* \Delta b$ , odnosno povećanje  $i$ -tog resursa za  $\Delta b$  utičaće na promenu vrednosti funkcije cilja primara za iznos od  $\Delta z(x^*) = y_i^* \Delta b_i$ . Dokaz: Neka  $x^*$  i  $x^{**}$  predstavljaju optimalne vrednosti promenljivih primara u slučajevima vektora  $b$  i  $b + \Delta b$  respektivno. Kako je struktura optimalne baze u oba slučaja ista, to optimalno rešenje duala  $y^*$  takođe je isto, tako da možemo pisati:

$$cx^{**} = y^*(b + \Delta b)$$

$$cx^* = y^*b$$

Ako poslednja dva izraza oduzmemo, dobijamo:  $\Delta z(x^*) = y^* \Delta b$ , gde je  $\Delta z(x^*) = cx^{**} - cx^*$  povećanje vrednosti funkcije cilja, izazvano povećanjem vrednosti vektora  $b$ , na osnovu čega smo dokazali da je to tvrdjenje tačno.

Na osnovu ovog rezultata možemo konstatovati da je  $y_i^* = \frac{\Delta z(x^*)}{\Delta b_i}$ , na osnovu

čega vidimo da vrednost dualne promenljive  $y_i$  pokazuje za koliko jedinica će se povećati (smanjiti) funkcija cilja primara, ukoliko se korišćenje resursa  $b_i$  poveća (smanji) za jednu jedinicu. Zbog toga, dualne promenljive predstavljaju tzv. obračunske cene korišćenih resursa, odnosno tzv. cene u senci (shadow price).

#### 54. Osnovne karakteristike i značaj primene Simpleks tabele – postupak određivanja elemenata simpleks tabele

Simpleks tabela predstavlja tabelaran način prikazivanja problema linearnog programiranja, koji je prilagođen za potrebe rešavanja ovih problema korišćenjem simpleks metoda. Ovaj tabelarni postupak primene simpleks metoda omogućava da se u nizu iteracija dođe do optimalnog rešenja.

Početno bazično rešenje koje kod standardnog problema max odgovara početku prostora predstavlja se prvom simpleks tabelom, koja predstavlja polaznu osnovu za određivanje optimalnog rešenja. Na osnovu prve simpleks tabele primenom simpleks kriterijuma za promenu vektorske baze preko niza simpleks tabela, dolazimo do optimalnog rešenja.

Opšti oblik simpleks tabele predstavice na primeru rešavanja zadatka standardnog problema maksimuma:

$$(\max) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p \leq b_m$$

$$x_1, \dots, x_p \geq 0$$

Uvođenjem dodatnih promenljivih sistem nejednačina se transformiše u sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
 (\max) z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p + 0 \cdot x_{p+1} + \dots + 0 \cdot x_{p+m} \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + x_{p+1} &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + x_{p+2} &= b_2 \\
 &\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mp}x_p + x_{p+m} &= b_m \\
 x_1, \dots, x_{p+m} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Početno bazično rešenje određuje se tako što pretpostavimo da su realne promenljive jednake nuli, a dodatne slobodnim članovima sistema ograničenja. Prvu simpleks tabelu možemo predstaviti:

$C_B \setminus C_j$	$\alpha_0$	$x_B$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_p$	$c_{p+1}$	$c_{p+2}$	$\dots$	$c_{p+m}$
			$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_p$	$x_{p+1}$	$x_{p+2}$	$\dots$	$x_{p+m}$
0	$x_{p+1}$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1p}$	1	0	$\dots$	0
0	$x_{p+2}$	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2p}$	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
0	$x_{p+m}$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mp}$	0	0	$\dots$	1
$z_j$	$z$		$z_1$	$z_2$	$\dots$	$z_p$	0	0	$\dots$	0
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	$\dots$	$c_p - z_p$	0	0	$\dots$	0

Simpleks tabela I koja predstavlja početno bazično rešenje obrazovana je:

1. U prvu kolonu tabele unosimo koeficijente koji se u funkciji cilja nalaze uz bazične promenljive. To su nule, jer su koeficijenti uz dodatne promenljive 0.
2. U drugu kolonu unosimo bazične promenljive, tj. dodatne promenljive.
3. Kolona  $x_B$  pokazuje vrednosti bazičnih promenljivih
4. U kolone  $x_1, x_2, \dots, x_p$  unosimo koeficijente koji se nalaze uz ove promenljive u sistemu ograničenja
5. U kolone  $x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$  koeficijenti obrazuju jediničnu matricu
6. U zaglavlje unosimo vrednosti koeficijenata koji se u funkciji cilja nalaze uz promenljive iz odgovarajuće kolone simpleks tabele
7. Elemente vrste  $z_j$  određujemo kao zbir proizvoda koeficijenata iz prve kolone i odgovarajućih koeficijenata iz pojedinačnih kolona
8. Poslednja vrsta je I simpleks kriterijum za promenu baze u cilju optimizacije programa.

Postupak određivanja elemenata naredne simpleks tabele podrazumeva realizaciju narednih operacija:

- a) određivanje koju od prethodno nebazičnih promenljivih treba uključiti u bazu
- b) određivanje koja od prethodno bazičnih promenljivih treba da napusti bazu
- c) utvrđivanje vrednosti promenljivih u novom rešenju
- d) utvrđivanje vrednosti koeficijenata nove simpleks tabele

e) utvrđivanje vrednosti funkcije cilja, koja odgovara rešenju koje je predstavljeno novom simpleks tabelom, kao i izračunavanje vrednosti funkcija  $z_j$  za sve promenljive

a) u naredno bazično moguće rešenje treba uključiti onu prethodno nebazičnu promenljivu za koju je razlika  $c_j - z_j$  najveća pozitivna. Rešenje je optimalno kada u poslednjem redu simpleks tabele ( $c_j - z_j$ ) ne postoji ni jedna pozitivna vrednost.

b) iz baze treba eliminisati onu prethodno bazičnu promenljivu  $x_i$  za koju

$$\text{odredimo minimalnu vrednost: } \rho = \min \frac{x_i}{x_{ij}}, \quad x_{ij} > 0.$$

c) Vrednosti promenljivih u novoj simpleks tabeli određujemo:  
novouvedena promenljiva:  $x_k = \rho$

$$\text{vrednosti ostalih promenljivih: } x_r = b_r - \frac{b_i}{a_{ik}} a_{rk}$$

što znači da vrednost novouvedene promenljive je jednaka minimalnoj vrednosti količnika iz prethodnog rešenja ( $\rho$ ) dok vrednosti ostalih promenljivih izračunavamo tako što od njihovih vrednosti iz prethodne iteracije oduzmemo proizvod vrednosti novouvedene promenljive i odgovarajućeg koeficijenta koji se nalazi u karakterističnoj koloni simpleks tabele.

d) vrednosti koeficijenata nove simpleks tabele određujemo:

$$\text{koeficijenti u karakterističnoj vrsti simpleks tabele: } a_{ij}' = \frac{a_{ij}}{a_{ik}}$$

$$\text{koeficijenti u ostalim vrstama: } a_{rj}' = a_{rj} - \frac{a_{ij}}{a_{ik}} \cdot a_{rk}$$

e) koeficijente koji se nalaze u karakterističnoj vrsti dobijamo tako što njihovu prethodnu vrednost podelimo karakterističnim elementom. Ostale koeficijente  $r$ -tog reda  $j$ -te kolone određujemo tako što se od njegove prethodne vrednosti oduzme proizvod između koeficijenata  $r$ -tog reda karakteristične kolone i količnika koeficijenata  $j$ -te kolone karakterističnog reda sa karakterističnim elementom.

f) vrednost funkcije cilja određuje se množenjem koeficijenata prve kolone odgovarajućim vrednostima promenljivih, ili na osnovu karakterističnih

$$\text{elemenata: } z' = z + \frac{b_i}{a_{ik}} \cdot c_k.$$

## 55. Problem degeneracije zadatka linearnog programiranja – uzroci i posledice

Problem degeneracije linearnog programiranja predstavlja takav slučaj kod koga jedna ili više bazičnih promenljivih imaju vrednost 0. Ovakav problem se javlja kada u zadatku imamo suvišnih ograničenja. Prilikom rešavanja zadatka linearnog programiranja postojanje problema degeneracije će se manifestovati prilikom određivanja vrednosti količnika  $\rho$ , koji nam služi za isključivanje neke od prethodno bazičnih promenljivih. Ukoliko u zadatku postoji problem degeneracije, onda će u nekoj od iteracija, prilikom određivanja vrednosti količnika II simpleks kriterijuma, dobiti dve ili više

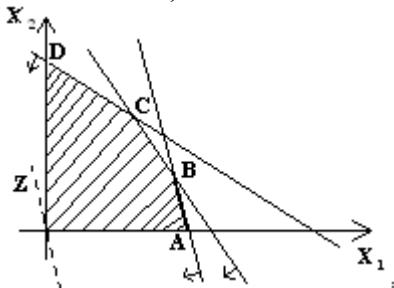
jednakih minimalnih vrednosti. U tom slučaju ne možemo odrediti koju od prethodno bazičnih promenljivih treba isključiti iz baze. U narednoj iteraciji neka od prethodno bazičnih promenljivih će biti jednaka 0, odnosno vrednost količnika  $\rho$  će biti jednaka 0, zbog čega će se dogoditi da dva ili više uzastopnih rešenja imaju jednaku vrednost funkcije cilja. U slučaju degeneracije može se pojaviti problem ciklusa – slučaj da u toku rešavanja zadatka ponovo dobijemo isto rešenje sa nekim od prethodnih. Postupak čijom primenom se eliminiše mogućnost postojanja ciklusa je da izađe iz baze onaj vektor kod koga je imenilac veći.

#### 56. Jedinstveno i višestruko optimalno rešenje u modelu linearnog programiranja – grafička i analitička interpretacija

Kod problema maksimuma optimalno rešenje predstavljali smo simpleks tabelom u kojoj su sve razlike za nebazične promenljive u poslednjoj vrsti ( $c_j - z_j$ ) negativni. Geometrijski posmatrano takvo optimalno rešenje problema maksimuma nalazi se u jednoj ekstremnoj tački (najudaljenija od koordinatnog početka) konveksnog ograničenog i zatvorenog skupa mogućih rešenja. To je jedinstveno rešenje. Međutim u nekim slučajevima može se dogoditi da izračunato optimalno rešenje nije jedinstveno, odnosno postoji višestruko optimalno rešenje.

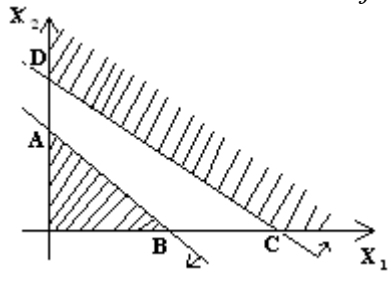
Ukoliko u okviru neke simpleks tabele postoji makar jedna razlika prvog simpleks kriterijuma ( $c_j - z_j$ ) = 0, za prethodno nebazičnu promenljivu  $x_j$ , dok su vrednosti ovih razlika za ostale nebazične promenljive negativne, izračunato optimalno rešenje nije jedinstveno. Posle I i II simpleks kriterijuma dobili smo takođe optimalno rešenje za koje funkcija cilja ima istu vrednost kao i u slučaju prethodnog rešenja. Postojanje dva optimalna rešenja ima za posledicu da sve konveksne kombinacije ova dva rešenja, takođe predstavljaju optimalna rešenja, zbog čega kažemo da takav zadatak ima višestruko optimalno rešenje. Geometrijski, slučaj postojanja višestrukog optimalnog rešenja se javlja kada su koeficijenti pravca prave koja reprezentuje neko od ograničenja i koeficijent pravca prave funkcije cilja, jednaki.

Na slici se vidi da prava koja reprezentuje funkciju cilja se podudara sa pravom koja predstavlja gornju granicu vrednosti promenljivih  $x_1$  i  $x_2$  za koje je zadovoljena nejednačina ograničenja, na kojoj se nalazi duž AB. Na osnovu toga konstatujemo da se optimalno rešenje našeg zadatka nalazi u tačkama A i B, odnosno u svim tačkama duži AB.



57. Nepostojanje mogućih rešenja i neograničena vrednost funkcije cilja zadatka linearnog programiranja – grafička i analitička interpretacija

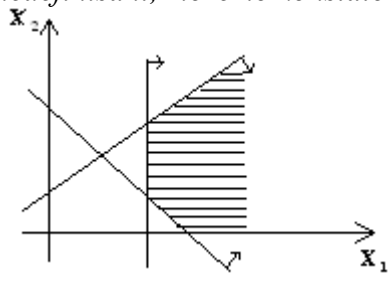
*Prilikom formulisanja modela linearnog programiranja može se dogoditi da model bude tako postavljen da ne postoje moguća rešenja. Takav slučaj se dešava ukoliko ne postoje vrednosti promenljivih za koje su zadovoljeni svi ograničavajući uslovi. Geometrijski, takav zadatak ima prazan skup mogućih rešenja. Nepostojanje mogućih rešenja možemo konstatovati u poslednjoj simpleks tabeli. Naime, u poslednjoj simpleks tabeli svi elementi vrste  $(c_j - z_j)$  pokazaće postojanje optimalnog rešenja, ali će se u optimalnom rešenju naći veštačka promenljiva, što je glavni indikator postojanja međusobno kontradiktornih ograničavajućih uslova u zadatku. Sve tačke koje se nalaze na duži AB i ispod nje zadovoljavaju prvu nejednačinu ograničenja, dok drugu nejednačinu i uslov nenegativnosti zadovoljavaju sve tačke na duži CD i iznad nje. Kako ova dva skupa tačaka nemaju presek, ne postoje tačke za koje su istovremeno zadovoljene obe nejednačine ograničenja. Znači skup mogućih rešenja je prazan skup, odnosno zadatak nema rešenja.*



*Problem nemogućnosti određivanja konačnih vrednosti promenljivih funkcije cilja u problemu maksimuma javlja se ukoliko je:*

*1. model formulisan tako da se jedna ili više promenljivih mogu povećavati neograničeno, a da ne bude narušen ni jedan od ograničavajućih uslova zadatka.*

*2. funkcija cilja na skupu mogućih rešenja nema konačnu vrednost*  
*Rešavajući problem maksimuma korišćenjem simpleks metoda, ovaj problem možemo identifikovati pre dobijanja vrednosti elemenata finalne simpleks tabele. Problem mogućnosti postojanja neograničene vrednosti promenljivih i funkcije cilja, konstatovaćemo u nekoj iteraciji u postupku određivanja promenljive koja treba da izađe iz baze. Da bi neka promenljiva izašla iz baze potrebno je da u odnosu na ostale vrednosti ima najmanji pozitivan količnik II simpleks kriterijuma. Međutim, ukoliko su svi ovakvi količnici negativni ili nedefinisani, možemo konstatovati da problem nema konačno rešenje.*



58. Postoptimalna analiza u linearnom programiranju – promena koeficijenata funkcije kriterijuma

*Postupak postoptimalne analize je postupak koji se koristi za ispitivanje da li će promena nekog od parametara modela linearnog programiranja uticati na promenu već izračunatog optimalnog rešenja. Primenom postoptimalne analize može se doći do jednog od sledeća dva zaključka:*

- a) nastale promene u vrednosti parametara modela neće dovesti do promene vektorske baze na osnovu kojeg je određeno optimalno rešenje.*
- b) prethodno izračunato optimalno rešenje u uslovima novih vrednosti parametra modela ne može ostati optimalno.*

**1 Promena vektora  $c$**

*Nakon određivanja optimalnog rešenja može doći do promene koeficijenata koji se nalaze uz promenljive koje se ne nalaze u optimalnom rešenju, kao i promene koeficijenata koji se nalaze uz bazične promenljive.*

**1.1. Promena koeficijenata nebazičnih promenljivih.**

*U poslednjoj iteraciji rešavanja zadatka konstatovano je da je za sve nebazične vektore  $A_j$  zadovoljen uslov  $(c_j - z_j) < 0$ . Pretpostavimo sada da se  $c_j$  menja, pri čemu nastalu promenu možemo predstaviti u obliku*

$$c_j^+ = c_j + \Delta c_j.$$

*Da bi utvrdili da u novim uslovima rešenje izračunato na osnovu baze  $\alpha_{opt}$  i dalje ostaje optimalno, neophodno je da proverimo da li će povećanje vrednosti koeficijenta  $c_j$  dovesti do potrebe za uvođenjem prethodno nebazičnih vektora  $A_j$  u bazu. U tom cilju, primenjuje se I simpleks kriterijum sa novom vrednošću koeficijenta  $c_j$ , odnosno:*

$$(c_j^+ - z_j) = c_j + \Delta c_j - z_j = (c_j - z_j) + \Delta c_j.$$

*Da bi rešenje ostalo optimalno neophodno je da vektor  $A_j$  i dalje ostane nebazičan. To će se dogoditi ukoliko je  $c_j^+ - z_j \leq 0$ , odnosno ukoliko je  $(c_j - z_j) + \Delta c \leq 0$ . Na osnovu poslednje relacije vidimo:*

a)  $\Delta c_j < |c_j - z_j| \Rightarrow$  rešenje ostaje optimalno

b)  $\Delta c_j > |c_j - z_j| \Rightarrow$  rešenje nije optimalno. U bazu uključujemo  $A_j$ .

**1.2. Promena koeficijenata bazičnih promenljivih**

*I ovde treba utvrditi vrednost razlika  $(c_j - z_j)$  za nebazične vektore. S obzirom da vrednosti  $c_j$  ostaju nepromenjeni, u ovom slučaju neophodno je izračunati vrednost  $z_j$  za sve nebazične promenljive.*

*Označimo sa  $c_B$  vektor koeficijenata koji se u funkciji cilja nalaze uz bazične promenljive. Pretpostavimo da je došlo do povećanja za iznos  $\Delta c_B$ , tako da je novi vektor ovih koeficijenata  $c_B^+ = c_B + \Delta c_B$ . Vrednosti  $z_j$  za nebazične vektore određene su iz relacije  $z_j = c_B \cdot \bar{x}_j$ , gde je  $\bar{x}_j$  vektor koeficijenata linearne kombinacije bazičnih vektora i nebazičnog vektora  $A_j$  izračunat u*

obliku  $\bar{x}_j = \alpha_{opt}^{-1} \cdot A_j$  ostao nepromenjen.

Vrednosti  $z_j$  u uslovima promenjenih koeficijenata vektora  $c_B$  odredićemo na sledeći način:  $z_j^+ = c_B^+ \bar{x}_j = (c_B + \Delta c_B) \cdot \bar{x}_j = c_B \cdot \bar{x}_j + \Delta c_B \cdot \bar{x}_j = z_j + \Delta z_j$ .

S obzirom da vrednosti  $c_j$  ostaju nepromenjene, kriterijum optimalnosti sada će biti  $c_j - z_j^+ = c_j - (z_j + \Delta z_j) \leq 0$ . Možemo konstatovati da ako je:

a)  $\Delta z_j > (c_j - z_j) \Rightarrow$  rešenje ostaje optimalno

b)  $\Delta z_j < (c_j - z_j) \Rightarrow$  rešenje nije optimalno. U bazu uključujemo  $A_j$ .

U uslovima promene svih koeficijenata funkcije cilja, kada bi imali  $(c_j^+ - z_j^+) = (c_j + \Delta c_j) - (z_j + \Delta z_j) \leq 0$ , optimalno rešenje se ne bi menjalo.

Ukoliko je bar jedna od razlika pozitivna rešenje bi i dalje bilo moguće, ali ne i optimalno.

## 2. Promena vektora $b$

$b$  je vektor slobodnih članova sistema ograničenja. Promena =  $\Delta b$ , pa je  $b^+ = b + \Delta b$ , vrednosti bazičnih promenljivih  $x_B = \alpha_{opt}^{-1} \cdot b$ , pa će u uslovima izmenjenog vektora  $b$  biti:  $x_B^+ = \alpha_{opt}^{-1} \cdot b^+ = \alpha_{opt}^{-1} \cdot (b + \Delta b)$ . Ukoliko je zadovoljen uslov  $x_B^+ \geq 0$  rešenje je i dalje optimalno.

## 3. Promena matrice $A$

### 3.1 Promena nebazičnog vektora $A_j$

Da bi utvrdili da li taj vektor treba uključiti u bazu, računamo novu vrednost kolone matrice zvezdice:  $\bar{x}_j^+ = \alpha_{opt}^{-1} \cdot A_j^+$ , zatim računamo  $z_j^+ = c_B \cdot \bar{x}_j^+$ , koje u I simpleks kriterijumu oduzimamo od nepromenjene funkcije cilja  $c_j - z_j^+ \Rightarrow$  ukoliko je rešenje  $\leq 0$  stara baza je i dalje optimalna, u suprotnom prethodno rešenje neće biti optimalno.

### 3.2 Promena bazičnog vektora $A_i^+$

Rešenja nove baze biće:  $x_B^+ = (\alpha^+)^{-1} \cdot b$ , a  $x_j^+ = (\alpha^+)^{-1} \cdot A_j$ , zatim

$z_j^+ = c_B \cdot x_j^+$ . Ukoliko su nove vrednosti bazičnih promenljivih  $x_B^+ \geq 0$

izračunato rešenje je moguće, a da li je optimalno utvrđujemo pomoću I simpleks kriterijuma.

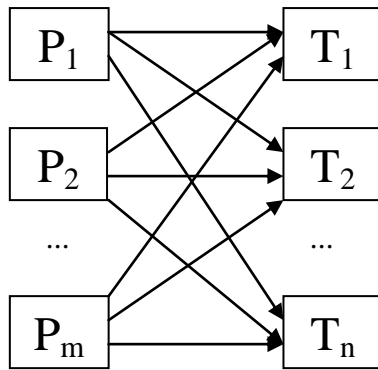
Ukoliko se desi da u okviru vektora  $x_B^+$  imamo bar jednu negativnu vrednost  $\Rightarrow$  rešenje nije moguće.

## 60. Definisati opšti oblik transportnog problema – analitički i tabelarno

Transportni problem predstavlja model čijim se korišćenjem određuje optimalan program distribucije određene vrste robe iz različitih mesta ponude (tzv. ishodišta) do različitih mesta tražnje (tzv. odredišta) pri čemu se podrazumeva njihova teritorijalna razdvojenost.

U cilju formulisanja opšteg oblika modela transporta robe, pretpostavimo da postoji konačan broj od  $m$  ishodišta  $P_1, P_2, \dots, P_m$  koja raspolaže određenom homogenom vrstom robe, za čije korišćenje je izražena potreba (tražnja) u  $n$  odredišta  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Ako pretpostavimo da postoji teritorijalna razdvojenost ishodišta i odredišta, tada je jasno da postoji  $m \cdot n$  potencijalnih puteva, preko

kojih ova roba može biti dostavljena od mesta ponude do mesta tražnje.



$x_{ij}$  – količina robe koja se transportuje iz i-tog ishodišta u j-to odredište  
 $c_{ij}$  – transportni troškovi po jedinici prevezene robe iz i-tog ishodišta u j-to odredište  
 $a_i$  – raspoloživa količina robe u i-tom ishodištu  
 $b_j$  – iznos tražnje za posmatranom robom u j-tom mestu tražnje (odredištu)

Osnovni cilj rešavanja transportnog problema može se formulirati, kao zahtev za određivanje optimalnih vrednosti promenljivih  $x_{ij}$ , tj. optimalnih količina prevezene robe na pojedinim putevima, za koje će se ostvariti minimalna vrednost ukupnih transportnih troškova, tj. minimalna vrednost funkcije cilja:

funkcija cilja:  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$  pri čemu moraju biti zadovoljena tri

ograničenja:

a) ukupna količina raspoložive robe svakog ishodišta mora biti raspodeljena

na mesta tražnje, tj.  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$

b) tražnja svakog odredišta mora biti u potpunosti zadovoljena  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$

c) količina prevezene robe na pojedinim putevima, odnosno odgovarajuće promenljive moraju biti nenegativne veličine, tj.  $x_{ij} \geq 0$ .

Funkcija cilja zajedno sa navedenim uslovima obrazuje opšti oblik zadatka transportnog problema u kome imamo  $m \cdot n$  promenljivih. Prošireni oblik navedenog modela možemo predstaviti u obliku:

$$\begin{array}{rcl}
 z = c_{11}x_{11} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + \dots + c_{mn}x_{mn} & & \\
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2 \\
 \dots & & \\
 & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \\
 x_{11} & + x_{21} + \dots & + x_{m1} = b_1 \\
 & x_{12} & + x_{22} + \dots & + x_{m2} = b_2 \\
 \dots & & & \\
 & x_{1n} & + x_{2n} + \dots & + x_{mn} = b_n \\
 & & x_{ij} \geq 0 & 
 \end{array}$$

Ovako formulisan model možemo predstaviti u vidu tabele:

<i>odr. ish.</i>	$T_1$	$T_2$	...	$T_n$	<i>ponuda</i>
$P_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$P_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$P_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
<i>tražnja</i>	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

U levi ugao polja naše tabele unose se transportni troškovi po jedinici prevezene robe na odgovarajućem putu, poslednja kolona pokazuje ponudu robe pojedinih ishodišta, dok poslednja vrsta pokazuje tražnju pojedinih odredišta.

61. Egzistencija mogućeg rešenja transportnog problema – dokazati i objasniti

*Teorema 5.1: Transportni problem ima rešenje ukoliko je ukupna ponuda jednaka ukupnoj tražnji, tj. ako je  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ .*

Dokaz: 
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \Rightarrow$$
 kako su leve strane jednake, jednake su i desne strane, tj.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$
 čime je dokazan uslov za rešavanje transportnog problema.

Da bi dokazali da izjednačavanje ukupne ponude i ukupne tražnje predstavlja i dovoljan uslov za rešavanje transportnog problema, treba da pokažemo da

količina prevezene robe predstavljena izrazom  $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$ , gde je

$$d = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$
 predstavlja moguće rešenje transportnog problema.

Kako su sve vrednosti  $a_i, b_j, d$  nenegativne veličine, to je  $x_{ij} \geq 0$ . Ukoliko

izraz  $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$  sumiramo po  $i$  i po  $j$  dobijamo:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{d} = b_j \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{d} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{d} = a_i \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{d} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

iz čega vidimo da  $x_{ij}$  zadovoljava sistem jednačina ograničenja i tražnje i ponude. Znači pokazali smo da jednakost ukupne ponude i ukupne tražnje u transportnom problemu, predstavlja potreban i dovoljan uslov za egzistenciju mogućeg rešenja.

62. Pokazati da je rang matrice koeficijenata sistema ograničenja transportnog problema  $m + n - 1$

*Teorema 5.3: Matrica koeficijenta sistema ograničenja transportnog problema ima rang  $m + n - 1$*

*Dokaz: Matricu koeficijenta sistema ograničenja našeg transportnog problema možemo predstaviti u obliku:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrica  $A$  reda  $(m+n) \times mn$  ima za elemente jedinice i nule pri čemu u svakoj koloni ima samo dve jedinice a ostalo su nule. Ukoliko saberemo prvih  $m$  vrsta matrice  $A$  dobićemo vrstu čiji su svi elementi jedinice. Istu takvu vrstu ćemo dobiti sabiranjem preostalih  $n$  vrsta matrice  $A$

tj.:  $p_1 + p_2 + \dots + p_m = p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_{m+n}$ , gde smo sa  $p_1, p_2, \dots, p_{m+n}$  obeležili vrste matrice  $A$ . Znači da svaku vrstu matrice  $A$  možemo izraziti u vidu linearne kombinacije ostalih. Ukoliko sada iz matrice  $A$  isključimo poslednju vrstu i uzmemo minor  $(m+n-1)$ -og reda dobijamo:

$$\det M_{(m+n-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Rang matrice nije  $m+n$  jer je uvek 1 vrsta zavisna od drugih, pa pogodnom transformacijom dobijamo da je rang matrice  $m+n-1$ , jer je vrednost dobijenog minora različita od nule. To je i trebalo dokazati.

63. Postojanje zavisnosti između jednačina sistema ograničenja transportnog problema – dokazati i objasniti

*Teorema 5.2: Broj linearno nezavisnih jednačina sistema ograničenja transportnog problema je  $m+n-1$ .*

*Dokaz: Pretpostavimo da imamo kombinaciju vrednosti promenljivih  $x_{ij}$  za koje znamo da zadovoljavaju sve jednačine sistema ograničenja izuzev na primer prvu jednačinu. Pokazaćemo da takva pretpostavka ne može biti zadovoljena. Očigledno je da levu stranu prve jednačine sistema ograničenja možemo pretstaviti u obliku:*

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

ako je za svako  $x_{ij}$  zadovoljeno svih  $m+n$  jednačina sistema ograničenja tj.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \text{ i } \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \text{ to jednakost 1 možemo predstaviti u obliku}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=2}^m a_i = a_1$$

Na taj način je  $\sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1$  tj. zadovoljena je i prva jednačina sistema

ograničenja. Isto bi mogli jednostavno pokazati da je svaka od jednačina sistema ograničenja zadovoljena ukoliko su zadovoljene sve preostale  $m+n-1$  jednačine sistema ograničenja transportnog problema.

64. Metodi određivanja početnog bazičnog rešenja programa transporta

Metodi koji se koriste za određivanje početnog bazičnog rešenja su:

- a. metod severozapadnog ugla
- b. metod minimalnih troškova
- v. Vogelov aproksimativni metod

**a. metod severozapadnog ugla**

-raspoređivanje količina robe za prevoz preko različitih puteva započinjemo iz levog gornjeg (severozapadnog) ugla tabele odnosno polja (1,1), nakon toga u  $m+n-1$  koraka idući dijagonalno raspoređuju se količine robe u različita polja tabele koja odgovaraju različitim putevima . Postupak se završava nakon iscrpljivanja svih ponuđenih količina robe u pojedinim ishodištima, odnosno nakon zadovoljenja ukupne tražnje po jedinim odredištima .

-U polje (1,1) unosimo manji od iznosa ponude odnosno tražnje koji odgovara prvoj vrsti i prvoj koloni tabele, tj. imamo da je  $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ . Ukoliko je  $a_1 < b_1$  tada je  $x_{11} = a_1$  tj. tada u prvom koraku iscrpljujemo ukupnu ponudu prvog ishodišta , zbog čega količine koje odgovaraju narednim poljima prve vrste moraju biti jednake nuli . Procedura se nastavlja prelaskom na naredno polje prve kolone u koje unosimo  $x_{21} = \min(a_2, b_1 - x_{11})$ .

Suprotno ako je  $a_1 > b_1$ , tada će preostala polja prve kolone ostati prazna , a odgovarajuće promenljive će biti jednake nuli , dok će se u naredno polje prve vrste uneti  $x_{12} = \min(a_1 - x_{11}, b_2)$ .

Znači metod severozapadnog ugla obezbeđuje naizmenično iscrpljivanje ponude ( ishodišta ) , odnosno zadovoljavanje tražnje odredišta .Postupak se završava u poslednjem polju po dijagonali ( polje  $m, n$  ) u koje se uvek unosi jednaka količina preostalog iznosa ponude poslednje vrste i preostalog iznosa tražnje poslednje kolone.

Osnovna prednost primene ovog metoda je jednostavnost.

**b. metod minimalnih troškova**

-Metod minimalnih troškova podrazumeva prevashodno korišćenje puteva ( polja puteva ) kojima odgovaraju najmanji troškovi po jedinici prevezene robe.

-Postupak određivanja početnog bazičnog rešenja metodom minimalnih troškova započinje korišćenjem puta kojem odgovaraju najmanji troškovi pri čemu u odgovarajuće polje tabele unosimo minimalno moguću količinu za prevoz. Naizmeničnim popunjavanjem preostalih praznih polja kojima odgovaraju najmanji transportni troškovi , u  $m+n-1$  koraka dolazi se do početnog bazičnog rešenja.

-Prednost ovog metoda ogleda se u činjenici da njegova primena obezbeđuje značajno skraćivanje postupka određivanja optimalnog rešenja.

**c. Vogelov aproksimativni metod**

- Vogelov model, odnosno, metod maksimalnih razlika, sastoji se u izračunavanju potencijalnih gubitaka, koji će nastati ukoliko se između dva polja sa minimalnim transportnim troškovima, koja se nalaze u nekoj vrsti (koloni) tabele koristi ono polje u kome su transportni troškovi veći.

- Postupak izračunavanja vrednosti promenljivih početnog bazičnog rešenja primenom Vogelovog metoda, započinje izračunavanjem vrednosti razlika između dva minimalna troška za svaku vrstu i kolonu tabele. Tako izračunate razlike pridružujemo vrstama i kolonama tabele, nakon čega određujemo vrstu, odnosno kolonu kojoj odgovara najveća vrednost ovako pridruženog elementa. Početnu količinu raspoređujemo u polje sa najnižim troškovima, koje odgovara vrsti (koloni) sa najvećom ovako izračunatom razlikom. S obzirom da se u jednom koraku eliminiše ili vrsta ili kolona, nakon svakog

*raspoređivanja vrši se izračunavanje promjenjenih razlika između dva minimalna elementa. Ukoliko je u jednom koraku eliminisana vrsta, to može izazvati promenu pridruženih razlika po kolonama i obrnuto. Izračunavanjem samo promjenjne razlike, sukcesivnim popunjavanjem polja tabele vršimo u skladu sa kriterijumom maksimalne razlike između dva minimalna elementa. Postupak se završava nakon preraspodeljivanja ukupne ponude na mesta tražnje, tj. nakon popunjavanja  $m + n - 1$  polja tabele.*

## 65. Metodi optimizacije programa transporta

*Metodi optimizacije programa transporta su:*

**a. Stepping stone metod (metod skakanja sa kamena na kamen)**

**b. Metod potencijala**

**a. Stepping stone metod (metod skakanja sa kamena na kamen)**

- Suština ovog metoda sastoji se u postupku ispitivanja uticaja potencijalnog korišćenja nezauzetih polja tabele na ukupne transportne troškove.

- Metod skakanja sa kamena na kamen, primenjuje se tako što se skakanjem za svako prazno polje tabele koje predstavlja početno bazično rešenje, obrazuje poligon čija se sva temena, izuzev početnog, nalaze u popunjenim poljima. Svi uglovi ovako formiranog poligona, koji ima paran broj temena su pravi. Na osnovu ovako formiranog poligona, za svako prazno polje tabele izračunavamo takozvane relativne koeficijente troškova, koji pokazuju za koliko jedinica će se ukupni troškovi transporta povećati (smanjiti) ukoliko u odgovarajuće polje uvrstimo jednu jedinicu prevezene robe. Relativne koeficijente troškova izračunavamo tako što od transportnog troška koji odgovara početnom polju, naizmenično oduzimamo i dodajemo jedinične transportne troškove koji se nalaze na temenima poligona. Pozitivna vrednost ovako izračunatog relativnog koeficijenta troškova, pokazaće da bi angažovanje odgovarajućeg polja dovelo do povećanja ukupnih transportnih troškova, dok je u slučaju njegove negativne vrednosti zaključak suprotan. Prema tome, postojanje makar jednog negativnog relativnog koeficijenta troškova pokazuje, da početno bazično rešenje nije optimalno.

**b. Metod potencijala**

- Postupak primene metoda potencijala podrazumeva određivanje jednog tzv. množitelja za svaku od jednačina ponude i tražnje sistema ograničenja modela transporta. Množitelji za jednačine ponude  $u_i$  i množitelji za jednačine tražnje  $v_j$ , odnosno za odgovarajuće vrste i kolone tabele, određuju se tako da je za svaku bazičnu promenljivu, tj. popunjeno polje tabele zadovoljen uslov:

$$c_{ij} = u_i + v_j.$$

- Jednom od množitelja dodeljujemo proizvoljnu vrednost 0, a preostali množitelji (ima ih  $m + n$ ) se izračunavaju rešavanjem  $m + n - 1$  jednačina  $c_{ij} = u_i + v_j$ , pri čemu je polje  $(i, j)$  popunjeno. Da bi pokazali postupak optimizacije korišćenjem ovako izračunatih množitelja, pođimo od osnovnog

oblika modela transporta, tj.  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ ;  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ ;  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ .

Ukoliko sada  $i$ -tu jednačinu ponude pomnožimo množiteljem  $u_i$ , a  $j$ -tu jednačinu tražnje množiteljem  $v_j$  i oduzmemo od funkcije cilja, dobija se:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = z - \underbrace{\left( \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \right)}_{z_0}. \text{ Ako izvršimo smenu:}$$

$$c_{ij}' = c_{ij} - u_i - v_j \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j = z_0, \text{ možemo pisati:}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}' x_{ij} = z - z_0, \text{ odnosno } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}' x_{ij} = \Delta z.$$

- Na osnovu poslednje relacije vidimo da izračunata ocena  $c_{ij}'$  za prazno polje tabele pokazuje pogodnost njegovog korišćenja za izračunavanje poboljšanog rešenja. Ukoliko za jedno ili više praznih polja dobijemo negativnu vrednost potencijala ( $c_{ij}' < 0$ ) konstatujemo da analizirani program transporta nije optimalan, već se korišćenjem ovih polja može izračunati povoljnije rešenje. Za poboljšanje programa se koristi polje, kojem odgovara negativni potencijal sa najvećom apsolutnom vrednošću.

\* Znači da bi odredili optimalni program transporta robe metodom potencijala, neophodno je:

1. Odrediti početni program transporta robe
2. Odrediti množitelje  $u_i$  i  $v_j$  za svaku vrstu i kolonu početnog rešenja
3. Izračunati potencijale  $c_{ij}'$  za svako prazno polje tabele
4. Koristeći polje sa najmanjom negativnom vrednosti potencijala  $c_{ij}'$  odrediti poboljšani program transporta odgovarajućim bilansiranjem količine prevezene robe. Postupak se realizuje u uzastopnim iteracijama sve dok se ne odredi takav program transporta robe za čija prazna polja tabele imamo nenegativne vrednosti potencijala, tj.  $c_{ij}' \geq 0$ .

## 66. Degeneracija problema transporta

Ukoliko u postupku rešavanja transportnog problema odredimo rešenje u kome nema  $m + n - 1$  bazičnih promenljivih, odnosno popunjenih polja tabele, konstatujemo da takvo rešenje ne zadovoljava neophodan uslov za primenu nekog od metoda optimizacije. Takav slučaj predstavlja degeneraciju transportnog problema. Ovakav slučaj se javlja kad je neka od parcijalnih suma ponude jednaka nekoj od parcijalnih suma tražnje.

Slučaj degeneracije transportnog problema, može se pojaviti prilikom određivanja početnog bazičnog rešenja, kao i u postupku poboljšavanja nekog programa transporta u proceduri optimizacije.

- Prilikom određivanja početnog rešenja degeneracija se javlja u slučaju kada popunjavanjem nekog od polja istovremeno eliminišemo raspoložive količine odgovarajuće vrste i kolone, odnosno iscrpimo svu raspoloživu ponudu robe i zadovoljimo ukupnu tražnju koja odgovara tom odredištu.

- U postupku optimizacije slučaj degeneracije se javlja kad u jednom koraku iz baze isključimo dve promenljive, a u bazu uključimo samo jednu prethodno nebazičnu promenljivu. Tabelarno, ovaj slučaj nastaje kada u jednom koraku

*dva (ili više) prethodno popunjenih polja postaju prazna, dok popunjavamo samo jedno prethodno prazno polje.*

*- Slučaj degeneracije se prevazilazi tako što se u neko od praznih polja unosi količina od  $\varepsilon$  jedinica robe, gde je  $\varepsilon$  infinitesimalno mali broj, koji ne narušava izražene jednakosti ponude i tražnje. Obično se ova veličina unosi u prazno polje, kojemu odgovaraju najniži transportni troškovi po jedinici prevezene robe.*

#### 67. Model asignacije – osnovne karakteristike i algoritam za rešavanje modela

*-Osnovni zahtev koji se u okviru ovog modela postavlja jeste optimizacija rasporeda određenog broja izvršilaca za obavljanje određenog broja ekonomskih aktivnosti.*

*-Ukoliko pretpostavimo da m izvršilaca treba rasporediti za obavljanje n poslova, pri čemu se postavlja zahtev za određivanje takvog rasporeda za koji će se ostvariti minimalni ukupni troškovi rada. Model raspoređivanja možemo predstaviti u sledećem obliku:*

$$(\min) z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad j=1, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ili } 1$$

*$x_{ij}$  - predstavlja promenljivu koja pokazuje angažovanje ili ne angažovanje j-tog izvršioca za obavljanje j-tog posla.*

*$c_{ij}$  - pokazuje troškove angažovanja j-tog radnika za obavljanje j-posla.*

*$x_{ij} = 1$  -i -ti radnik treba biti angažovan za obavljanje j-te aktivnosti, dok u suprotnom slučaju ta promenljiva jednaka je nuli ( $x_{ij} = 0$ )*

*\* Specifičnost ovako izraženog problema u odnosu na transportni sastoji se u činjenici da je ponuda svakog ishodišta kao i tražnja svakog odredišta jednaka jedinici. Ovo proizilazi iz činjenice da je za obavljanje neke aktivnosti u postupku raspoređivanja moguće angažovati samo jednog izvršioca, odnosno da jedan izvršioc može obavljati samo jednu aktivnost.*

*-Za određivanje optimalnog programa raspoređivanja najčešće se koristi tzv.*

**Mađarski metod** koji se zasniva na zahtevu za minimizacijom tzv.

*oportunitetnih troškova, do kojih dolazi ukoliko se za obavljanje određene aktivnosti ne angažuje najefikasniji izvršilac. Postupak optimizacije*

*raspoređivanja primenom ovog metoda zasniva se na korišćenju matrice C, čiji su elementi koeficijenti funkcije cilja.*

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots & c_{2n} \\ c_{n1} & c_{n2} \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$C_{ij}$  -pokazuje trošak angažovanja  $i$ -tog izvršioca za obavljanje  $j$ -te aktivnosti.

Postupak optimizacije rasporeda izvršilaca za obavljanje određenog broja poslova realizuje se kroz sledeće tri faze:

### Faza 1

-U prvoj fazi na osnovu matrice  $C$  izračunavamo oportunitetne troškove angažovanja pojedinih izvršilaca za obavljanje pojedinih poslova. Za svaku od vrsta matrice  $C$  određujemo minimalan element koji oduzimamo od svakog elementa te vrste. Nakon ovoga za svaku kolonu dobijene matrice činimo isto, odnosno od svakog elementa oduzmemo vrednost najmanjeg elementa te kolone. Na taj način dobijamo novu matricu  $C'$  u kojoj svaka vrsta i kolona mora imati makar jednu nulu.

### Faza 2

-U dobijenoj matrici određujemo tzv. nezavisne i zavisne nule. Nezavisne su one koje su jedine u okviru pojedinih redova, dok su ostale zavisne. Redovima sa većim brojem nula proizvoljno određujemo broj nezavisnih nula. Nakon toga vertikalnim i horizontalnim linijama precrtavamo svako polje matrice  $C'$ , koje sadrži nulu i to na takav način da nulta polja precrtamo sa minimalno mogućim brojem linija. Ukoliko je broj nezavisnih nula jednak broju vrsta matrice određeno je optimalno rešenje. Ukoliko je broj nezavisnih nula manji od broja vrsta matrice formira se nova matrica u okviru naredne faze.

### Faza 3

-Ukoliko u drugoj fazi nije određeno optimalno rešenje procedura određivanja optimalnog rešenja na osnovu matrice  $C'$  realizuje se kroz sledeći algoritam:

1. Određuje se minimalni element  $C'$  koji nije precrtan ni jednom linijom.
2. Minimalni element se oduzima od svih neprecrtanih elemenata, dok se dodaje elementima koji se nalaze na preseku dveju linija.
3. Preostali precrtani elementi matrice  $C'$  iz ostale faze ostaju nepromenjeni.

-Ova procedura se nastavlja sve do trenutka određivanja matrice u kojoj ima nezavisnih nula tačno onoliko koliko matrica ima vrsta (redova).

## 68. Otvoreni model transportnog problema

Kada nije zadovoljen uslov o postojanju jednakosti između ukupne ponude i ukupne tražnje tj. kada je  $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$  tada kažemo da se radi o tzv. **otvorenom** modelu transporta. Razlikujemo dva oblika transporta:

a. Otvoreni model transporta u kome je  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$   $P > T$

b. Otvoreni model gde je  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$   $P < T$

a. U slučaju otvorenog modela u kome je  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  uvođenjem jednog fiktivnog mesta ( fiktivna kolona) tražnje čiji je iznos jednak razlici ukupne ponude

*i* tražnje svodi se na zatvoreni model transporta tj.  $b_n + 1 = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ .

**b.** Kod otvorenog transportnog problema u kome je ukupna ponuda manja od ukupne tražnje  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$  uvodi se fiktivno mesto ponude (fiktivni red) čija je ponuda jednaka razlici između ukupne tražnje i ukupne ponude tj.

$$a_m + 1 = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

U oba slučaja otvorenog modela koeficijenti u funkciji cilja koji se nalaze uz dodatne promenljive tj. transportni troškovi po jedinici prevezene robe, koje unosimo u ovako definisana polja tabele jednaki su nuli.

## Teorija igara

### 69. Matrične igre – osnovne karakteristike i postupak njihovog rešavanja

-Igra predstavlja uprošćeni model konflikta koji obuhvata ukupnost pravila ponašanja učesnika u igri (igrača) koja opredeljuju njihove moguće poteze kao i potencijalne rezultate njihovog izbora. Potencijalne rezultate igrača, odnosno ishod igre predstavljamo tzv. funkcijom plaćanja koja predstavlja numerički izraz dobitaka odnosno gubitaka igrača.

-Osnovna karakteristika teorije igara sadržana je u činjenici da veličina rezultata ne zavisi samo od izbora samog igrača, već i od izbora ostalih igrača. Svaki od igrača unapred poznaje moguće alternative koje mu stoje na raspolaganju u toku igre, koje nazivamo njegovim **strategijama**. Strategije predstavljaju ukupnost pravila ponašanja igrača i potencijalne rezultate izbora pojedinih alternativa svakoj konkretnoj situaciji. Svaka igra se realizuje preko pojedinačnih poteza igrača. Skup većeg broja poteza obrazuje partiju.

\* Kriterijumi za klasifikaciju igara su: broj igrača, broj strategija, karakter funkcije plaćanja i međusobna povezanost igrača.

1. Zavisno od broju igrača, sve igre delimo na igre sa dva lica, igre sa tri lica, ..., igre sa  $n$  lica.
2. Prema broju strategija razlikujemo konačnu igru – kada svakom igraču stoji na raspolaganju konačan broj strategija i beskonačnu igru – kada broj strategija nije ograničen.
3. Prema karakteru funkcije plaćanja sve igre delimo na igre sa nultom i igre sa nenultom sumom. Igra sa nultom sumom predstavlja takvu igru u kojoj je suma ukupnog plaćanja jednaka nuli, tj. dobitak jednog jednak je gubitku drugog igrača, a u igri sa nenultom sumom suma ukupnog plaćanja je različita od nule.
4. Zavisno od međusobnog odnosa igrača učesnika sve igre delimo na kooperativne i nekooperativne. Kooperativne igre predstavljaju takvu vrstu igara u kojima igrači formiraju koalicije koje im služe za međusobno usklađivanje ponašanja i izbor pojedinačnih strategija koje im obezbeđuju postizanje najpovoljnijih rezultata, a ukoliko u toku igre ne postoji koordinacija u ponašanju

(izboru poteza) od strane igrača, takva igra predstavlja nekooperativnu igru.

Analize i rešavanje igara:

1. Za igre kod kojih ne postoji potpuna informisanost igrača o potencijalnim odgovorima protivnika na njihov izbor pojedinih strategija, karakteristično je da se rezultat svih poteza u toku neke igre obračunava tek na kraju igre, kada se realizuje jedna partija. Ovakvu vrstu igre nazivamo igrom ekstenzivnog (opšteg) oblika.
2. Drugi postupak predstavljanja i analiziranja igre primenjuje se u situaciji takozvane pune informisanosti o potencijalnim rezultatima odabranih strategija od strane igrača. Ovu vrstu igre nazivamo igra u normalnoj formi i kod nje je unapred poznat rezultat igre.

Proste matricne igre:

Ako je  $\alpha = \beta$  takva igra je prosta matricna igra i nazivamo je igrom sa sedlastom tačkom.

Analizirajmo igru dva igrača sa nultom sumom, u normalnoj formi, kada svakom igraču stoji na raspolaganju konačan broj strategija. Pretpostavimo da imamo igru u kojoj učestvuju dva igrača, igrač A i igrač B, pri čemu igrač A raspolaže sa  $m$  čistih strategija  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , dok igrač B raspolaže sa  $n$  strategija

$B_1, B_2, \dots, B_n$ . Izboru bilo koje od strategija igrača A, odgovara izbor neke od strategija igrača B. Rezultat igre za slučaj izbora para strategija  $(A_i, B_j)$  će se predstavljati vrednošću  $a_{ij}$ , koji pokazuje koliko iznosi dobitak igrača A i gubitak igrača B. Sve potencijalne rezultate različitih kombinacija izbora strategija od strane igrača A i B možemo predstaviti u obliku matrice igre, odnosno matrice plaćanja koja predstavlja tabelarni zapis funkcije plaćanja u igri dva lica sa nultom sumom:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ili u obliku } \begin{array}{c|cccc} & \text{B} & & & \\ & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \hline \text{A} & & & & \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

Elementi matrice plaćanja pokazuju koliko će iznositi dobitak za igrača A, odnosno gubitak za igrača B u slučaju izbora bilo koje od mogućih kombinacija strategija.

\* Osnovni cilj svakog od igrača jeste da odabere strategiju koja će mu omogućiti ostvarivanje najboljeg mogućeg rezultata, tj. maksimalan mogući dobitak igraču A i minimalan mogući gubitak igraču B. Znači igrač A za svaku svoju čistu strategiju  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) određuje minimalan dobitak koji će ostvariti bez obzira na izbor strategije igrača B, tj. opredeljuje minimalan element svake od vrsta matrice plaćanja u obliku  $\alpha_i = \min_j a_{ij}$   $j = 1, \dots, n$ .

Zatim igrač A bira maksimalan element u obliku  $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$ , koji predstavlja tzv. maxmin vrednost, tj. donju granicu vrednosti igre koja pokazuje

garantovani dobitak koji će igrač A ostvariti – optimalna strategija.  
Igrač B se trudi da odabere takve strategije koje mu obezbeđuju minimizaciju gubitaka. Znači, igrač B izračunava maksimalne gubitke

$$\beta_j = \max a_{ij} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\beta = \min \beta_j = \min \max a_{ij}$$

i predstavlja gornju granicu vrednosti igre tj. minmax vrednost za igrača B.  
Strategiju kojoj odgovara ovako izračunata gornja granica vrednosti igre, igrač B će smatrati optimalnom strategijom.

- Izborom optimalnih strategija od strane oba igrača, oni obezbeđuju za sebe najpovoljniji rezultat. Igrač A obezbeđuje dobitak ne manji od donje granice igre  $\alpha$ , a za igrača B gubitak ne može biti veći od gornje granice određene vrednošću  $\beta$ .

#### 70. Matrične igre sa mešovitim strategijama

Mešovita strategija predstavlja kombinaciju različitih verovatnoća sa kojima će igrači u uzastopnom nizu poteza igrati pojedine strategije koje im stoje na raspolaganju.

- Ukoliko je igra dva lica sa nultom sumom definisana matricom plaćanja reda  $(m, n)$  u kojoj igrač A može izabrati bilo koju od  $m$  strategija, njegovu mešovitu strategiju možemo predstaviti u vidu vektora  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , čiji elementi pokazuju verovatnoće sa kojima igrač A primenjuje pojedine strategije, pri čemu

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

Mešovitu strategiju igrača B možemo predstaviti u obliku vektora

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{čiji elementi pokazuju verovatnoće izbora igrača B neke od njegovih } n \text{ strategija, pri čemu je } y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Strategije igrača A i B za koje su verovatnoće  $x_i$  i  $y_j$  veće od nule predstavljaju aktivne strategije.

Ukoliko igrači A i B biraju strategije  $A_i$  i  $B_j$  sa verovatnoćama  $x_i$  i  $y_j$ , tada verovatnoću  $A_i B_j$  određujemo u obliku verovatnoće  $x_i y_j$ . Potencijalni dobitak za igrača A, tj. gubitak za igrača B predstavlja slučajnu veličinu koja zavisi od vektora X i Y i od matrice plaćanja. Vrednost igre u uslovima realizacije mešovitih strategija možemo predstaviti u vidu očekivane srednje vrednosti u obliku:

$$v = f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad \text{tj. u matričnom obliku } v = f(x, y) = XPY$$

X- vektor mešovite strategije igrača A

Y- vektor mešovite strategije igrača B

P- matrica plaćanja

$f(x, y)$ - funkciju plaćanja

#### 71. Odnos donje i gornje granice vrednosti matrične igre. Dokazati i objasniti.

*Teorema 6.1: U matričnoj igri gornja granica vrednosti igre ( $\beta$ ) uvek je veća ili*

jednaka u odnosu na donju granicu vrednosti igre ( $\alpha$ ), tj.  $\beta \geq \alpha$ .

*Dokaz:* Iz definicije gornje i donje granice vrednosti igre, proizilazi njihov odnos prema bilo kom od elemenata matrice plaćanja, koji možemo predstaviti u obliku  $\beta_j = \max a_{ij} \geq a_{ij}$ , dok je  $\alpha_i = \min a_{ij} \leq a_{ij}$   $i=1, \dots, m$   $j=1, \dots, n$

Iz oba izraza proizilazi da je:

$$\beta_j = \max a_{ij} \geq a_{ij} \geq \min a_{ij} = \alpha_i, \text{ odakle je } \beta_j \geq \alpha_i.$$

Dakle, možemo zaključiti da donja granica vrednosti igre nije veća od gornje granice vrednosti igre, odnosno da je  $\beta \geq \alpha$ .

Ukoliko je u matricnoj igri  $\alpha = \beta$ , takva igra je prosta matricna igra i nazivamo je igrom sa sedlastom tačkom. Sedlasta tačka matricne igre nalazi se na preseku optimalne strategije igrača za koje su izjednačena maxmin i minmax vrednost, tj. donja i gornja granica vrednosti igre.

## 72. Metodi rešavanja matricnih igara – analitički i grafički

- Različite vrste matricnih igara, zavisno od vrste i dimenzije matrice plaćanja, rešavaju se na različite načine.

- Tako igre sa matricom plaćanja reda (2,2), (2,n) i (m,2) mogu se rešavati i grafičkim i analitičkim putem. Zbog toga se igre sa matricom plaćanja (m,n) pokušavaju uprostiti i svesti na oblik pogodan za rešavanje grafičkim i analitičkim postupkom.

1. Rešavanje igre reda 2x2

To je matrica  $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$  matrica plaćanja.

U postupku rešavanja igre predstavljene matricom plaćanja reda (2,2), prvo se ispituje da li se izborom maxmin i minmax vrednosti, mogu opredeliti optimalne čiste strategije i vrednosti igre. Ako može, radi se o prosto matricnoj igri. Ukoliko utvrdimo da ne postoje čiste strategije, neophodno je odrediti optimalne mešovite strategije za oba igrača i odgovarajuću vrednost igre. Određivanjem  $v_G$  – donje granične vrednosti igre i  $v^G$  – gornje granične vrednosti igre, predstavlja način za rešavanje matricne igre.

- Da bi igra reda (2,2) predstavljala mešovitu matricnu igru, pretpostaviti moramo da su obe strategije za igrača A i B aktivne. Ovo će biti zadovoljeno ukoliko je za elemente matrice plaćanja zadovoljen uslov da za  $a_{11} > a_{12}$  imamo da je  $a_{21} < a_{22}$  i obrnuto. Označimo sa  $X = (x_1, x_2)$  mešovitu strategiju igrača A i sa  $Y = (y_1, y_2)$  mešovitu strategiju igrača B, imamo:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \qquad x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

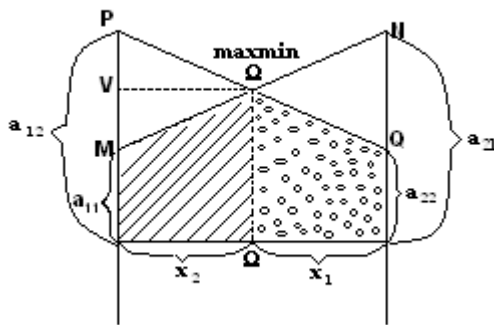
za igrača A:  $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \quad \Leftrightarrow$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

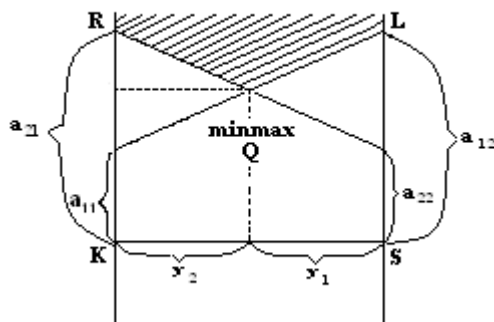
$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \text{ – vrednost igre}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v & y_1 &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \\
 \text{za igrača B: } & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v & \Leftrightarrow & \\
 & y_1 + y_2 = 1 & y_2 &= \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}
 \end{aligned}$$

U slučaju grafičkog rešavanja pretpostavićemo da su strategije igrača A i B  $X = (x_1, x_2)$  i  $Y = (y_1, y_2)$ . Na grafik nanosimo vrednosti dobitaka igrača A koje će on osvetariti u slučaju izbora prve, a zatim i druge strategije od igrača B, tako da ordinate tačaka koje se nalaze na krivoj liniji  $M\Omega Q$  i ispod nje predstavljaju zagarantovane dobitke. Tačka  $\Omega$  je maxmin vrednost, tj. donja granica vrednosti igre, čija odgovarajuća vrednost na ordinati pokazuje vrednost igre, a tačka  $\Omega'$  pokazuje relativan odnos druge i prve strategije igrača A.



- Postupak grafičkog rešavanja igre 2x2 sličan je i za igrača B:



## 2. Rešavanje igara (2,n) i (m,2)

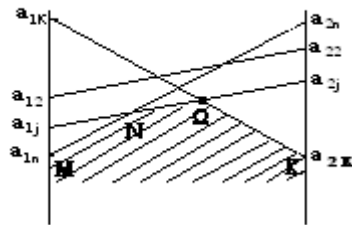
Rešavanje igara ovog tipa realizuje se tako što se grafičkim predstavljanjem mogućih rezultata igre za igrača koji ima dve strategije opredeljuju aktivne strategije njegovog protivnika na osnovu kojih se izračunava vrednost igre i optimalna strategija. Ako imamo igru koja je definisana matricom plaćanja:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}$$

iz koje vidimo da igrač A raspolaže sa dve, dok igrač B može birati bilo koju od n strategija. Mešovite strategije igrača A i B određene su vektorima  $X = (x_1, x_2)$  i

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)$ . Na grafiku predstavljamo potencijalne dobitke koje će igrač  $A$  ostvariti u slučaju izbora prve, druge, ...,  $j$ -te, ...,  $n$ -te strategije od strane igrača  $B$  i kao kod igre  $2 \times 2$  po principu *maxmin* opredeljujemo aktivne strategije igrača  $B$  i svodimo ovu vrstu igre na igru  $2 \times 2$ .

- Garantovani dobitci za igrača  $A$  nalaze se na krivoj liniji  $MN\Omega K$  i ispod nje. Tačka  $\Omega$  je donja granica vrednosti igre. Strategije na čijem preseku se nalazi tačka  $\Omega$  su aktivne, tako da igru  $(2, n)$  svodimo na igru  $2 \times 2$ . Sličan postupak rešavanja igre primenjujemo u slučaju igre  $(m, 2)$ , ali u tom slučaju određujemo gornju granicu vrednosti igre (po  $y$ ).



### 73. Redukcija matrice plaćanja – dominantna i dominirana strategija

Ukoliko je igra definisana matricom plaćanja reda  $(m, n)$ , a  $m > 2$  i  $n > 2$ , matricu pokušavamo uprostiti i svesti na jedan od oblika  $2 \times 2$ ,  $m \times 2$  ili  $2 \times n$ . Jedan od najčešće korišćenih postupaka uprošćavanja matrice plaćanja jeste postupak redukcije matrice plaćanja primenom tzv. pravila dominacije. Ako imamo igru

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

u kojoj vrste reprezentuju strategije igrača  $A$ , dok kolone predstavljaju  $n$  strategija koje može koristiti igrač  $B$ .

\* Igrač  $A$  ponašajući se racionalno, nikada neće igrati strategije koje su „lošije“ u odnosu na druge strategije. Znači, ukoliko elementi  $k$ -te vrste nisu manji od elemenata  $l$ -te vrste, tj.  $a_{kj} \geq a_{lj}$ , to dobitak ne može biti manji ukoliko izabere strategiju  $A_k$ . Strategija  $A_k$  je pogodnija od strategije  $A_l$ , zbog čega strategiju  $A_k$  smatramo dominantnom, a strategiju  $A_l$  dominiranom. Igrač  $A$  nikada neće izabrati dominiranu strategiju, pa je možemo eliminisati, a da se ne promeni vrednost igre. A ako imamo dve iste strategije, jednu od njih možemo isključiti.

\* Igrač  $B$ : ukoliko imamo da elementi  $r$ -te kolone nisu veći od elemenata  $s$ -te kolone, tj. ukoliko  $a_{ir} \leq a_{is}$ , tada je za njega povoljnije da bira strategiju  $B_r$  u odnosu na strategiju  $B_s$ , zato što izborom strategije  $B_r$  obezbeđuje manje gubitke.  $r$ -ta strategija je dominantna, a  $s$ -ta strategija je dominirana, pa dominiranu, tj.  $s$ -tu strategiju možemo eliminisati.

- Uzastopnom eliminacijom dominiranih strategija prvog i drugog igrača smanjujemo dimenziju matrice, dok je ne svedemo na oblik pogodniji za rešavanje od polazno definisane matrice (2,2), (2,n) ili (m,2).

74. Matrične igre i linearno programiranje

Igrač A: U uslovima ostvarivanja optimalne mešovite strategije imamo da je

$$\sum_{i=1}^m x_i^* a_{ij} \geq v, \text{ pri čemu je } \sum_{i=1}^m x_i^* = 1 \quad j=1, \dots, n$$

$x_i^*$  – verovatnoća izbora  $i$ -te optimalne strategije ( $i=1, \dots, m$ )

$v_G$  – donja granica vrednosti igre igrača A

U razvijenom obliku to je:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v$$

⋮

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

Podelićemo i levu i desnu stranu svih  $n$  nejednačina i poslednje jednačine sa  $v$ , uz uslov da je  $v > 0$  koji obezbeđujemo transformacijom matrice plaćanja, nakon koje imamo  $a_{ij} > 0$ . Elemente nove matrice dobijamo u obliku  $P' = a_{ij} + A$ , a

$A = |a| + 1$ , znači to je pozitivan broj veći za jedan od pozitivne vrednosti najnižeg negativnog elementa osnovne matrice plaćanja. Tada imamo  $v' = v + A$

$$a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1 \quad t_i = \frac{x_i}{v} \quad i=1, \dots, m$$

$$a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1 \quad w = \sum_{i=1}^m t_i - \text{min imizacija vrednosti}$$

⋮

$$a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1/v$$

Model linearnog programiranja je:

$$(\min) w = t_1 + t_2 + \dots + t_m$$

$$a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1$$

$$a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1$$

⋮

$$a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1$$

$$t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0$$

čijim rešavanjem određujemo optimalne mešovite strategije za igrača A u obliku  $x_i = t_i \cdot v$ , pri čemu je  $v = 1/w$ .

Igrač B: Za igrača B mora biti zadovoljeno  $\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j^* \leq v$  i  $\sum_{j=1}^n y_j^* = 1$ , u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n &\leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n &\leq v \\ &\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n &\leq v \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n &= 1 \end{aligned}$$

Deleći nejednačine i jednačine sa  $v$  dobijamo:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n &\leq 1 & u_j &= y_j / v & j &= 1, \dots, n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n &\leq 1 & z &= \sum_{j=1}^n u_j & - \text{maksimizacija vrednosti} \\ &\vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n &\leq 1 \\ u_1 + u_2 + \dots + u_n &= 1/v \end{aligned}$$

Model koji se koristi za određivanje optimalne mešovite strategije za igrača  $B$  možemo predstaviti u vidu odgovarajućeg problema linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} (\max) z &= u_1 + u_2 + \dots + u_n & \text{gde je } v &= 1/z \\ a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n &\leq 1 & y_j &= u_j \cdot v \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n &\leq 1 \\ &\vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n &\leq 1 \\ u_1, u_2, \dots, u_n &\geq 0 \end{aligned}$$

## Mrežno programiranje

### 75. Analiza strukture u mrežnom planiranju

*Pod analizom strukture podrazumeva se određivanje i precizno definisanje svake aktivnosti pojedinačno, a zatim uspostavljanje logičkog redosleda i međusobne zavisnosti između ovih aktivnosti, koje definišu projekat kao celinu. Nakon analize strukture pristupa se konstrukciji grafičkog modela analiziranog projekta, koji se naziva mrežni dijagram. Glavna karakteristika metoda mrežnog planiranja ogleda se u razdvajanju analize strukture od analize vremena datog projekta. Analiza strukture u osnovi je ista kod obe metode i CPM i PERT. Razlika nastaje tek pri transformaciji grafičkog u matematički model. Za metodu CPM, matematički model je deterministički, a za metodu PERT je stohastički.*

### 76. Mrežni dijagram i njegovi osnovni elementi

*Mrežni dijagram je konačan, povezan, orijentisan i cikličan graf  $G = (N, L)$  koji se sastoji iz dva skupa, skupa čvorova  $N = (1, 2, \dots, i, j, \dots, n)$  i skupa*

orijentisanih grana  $L = \{(i, j) | i, j \in N, i < j\}$ . Orijentisane grane prikazivaćemo neprekidnim linijama sa strelicama i zvaćemo ih aktivnostima, a čvorove ćemo prikazivati pomoću kružića i zvaćemo ih događajima. Znači, da bismo mogli da konstruišemo mrežni dijagram, projekat moramo da razdelimo na aktivnosti i događaje, koji predstavljaju osnovne elemente mrežnog dijagrama.

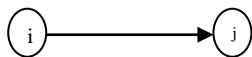
Aktivnosti se definišu kao elementi projekta, koji imaju određeno vremensko trajanje i za njihovu realizaciju potrebni su odgovarajući resursi. Postoje i aktivnosti koje imaju samo vremensko trajanje, a za njihovu realizaciju nisu potrebni resursi.

Da bi se pomoću mrežnog dijagrama pokazale sve zavisnosti u projektu, uvodi se pojam fiktivne aktivnosti, koja se prikazuje isprekidanim linijama sa strelicom. Fiktivna aktivnost se može definisati kao aktivnost za čiju realizaciju nije potreban nikakav konkretan rad, nema vremensko trajanje i ne troši nikakve resurse.

Događaj je takav element projekta, koji ne troši ni vreme ni resurse. To je samo trenutak vremena u kome započinje realizacija jedne ili više aktivnosti, ili vremenski trenutak u kome se završava realizacija jedne ili više aktivnosti. Svaka aktivnost ima jedan događaj kao svoj početak i drugi kao svoj završetak. Ovi događaji se nazivaju početni i završni događaj aktivnosti. Realizacija nijedne aktivnosti ne može da počne pre nego što se dostigne događaj koji predstavlja njen početak, kao i pre završetka realizacije svih aktivnosti koje joj prethode.

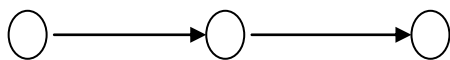
Početni događaj mrežnog dijagrama predstavlja vremenski trenutak u kojem započinje realizacija projekta. Njemu ne prethodi ni jedna aktivnost. Završni događaj mrežnog dijagrama predstavlja vremenski trenutak u kojem se završava realizacija projekta.

Svaki događaj treba numerisati nekim nenegativnim brojem. Na taj način svaka aktivnost mrežnog dijagrama određena je sa dva broja, brojem početnog i brojem završnog događaja. Ako je početni događaj numerisan brojem  $i$ , a završni brojem  $j$ , onda se takva aktivnost obeležava sa  $(i, j)$ , pri čemu uvek mora da bude ispunjen uslov  $i < j$ .

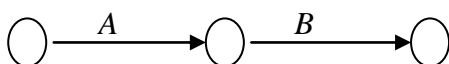


## 77. Osnovna pravila konstrukcije mrežnog dijagrama

1. Svaka aktivnost mora otpočeti događajem  $i$  i završiti događajem  $j$ .

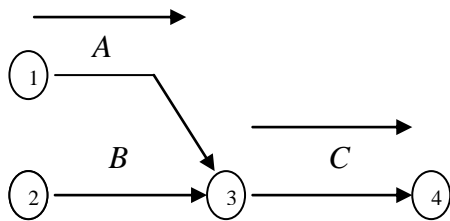


2. Ako završetak realizacije neke aktivnosti  $A$  predstavlja preduslov za početak realizacija druge aktivnosti  $B$ , onda se one moraju postaviti po redosledu realizacije.

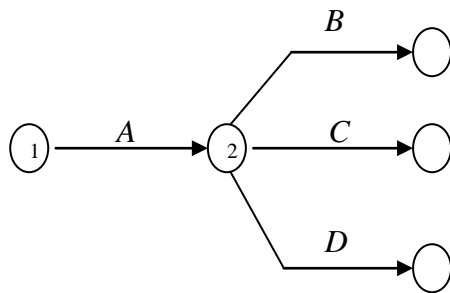


3. Ako se više aktivnosti  $A, B, \dots$  mora završiti da bi sledeća aktivnost  $C$  mogla

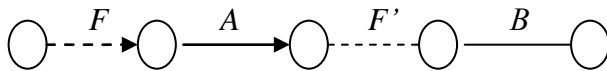
otpočeti, onda se one završavaju u početnom događaju te sledeće aktivnosti



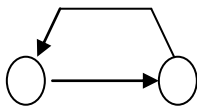
4. Ako realizacija više aktivnosti (B,C,D) može započeti pošto je prethodna aktivnost (A) realizovana, onda početni događaj svih ovih aktivnosti (B,C,D) predstavlja završni događaj prethodne aktivnosti A.



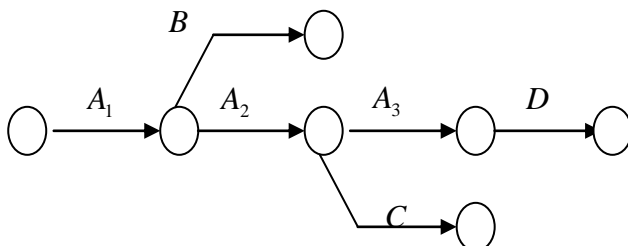
5. U nizu aktivnosti može se uključiti proizvoljan broj fiktivnih aktivnosti.



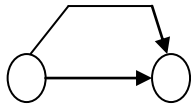
6. Nijedan događaj ne može sam sebi da prethodi, tj. mora biti vremenski orijentisan i ne može da sadrži zatvorene cikluse ili petlje.



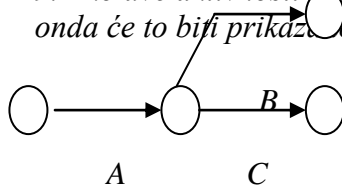
7. Složena aktivnost može da se podeli na potreban broj manjih delimičnih aktivnosti. Može se dogoditi da realizacija neke od sledećih aktivnosti može otpočeti pre potpunog završetka posmatrane aktivnosti.



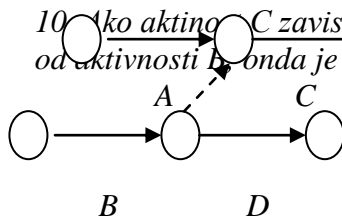
8. Dve ili više aktivnosti, završavaju se u istim događajima:



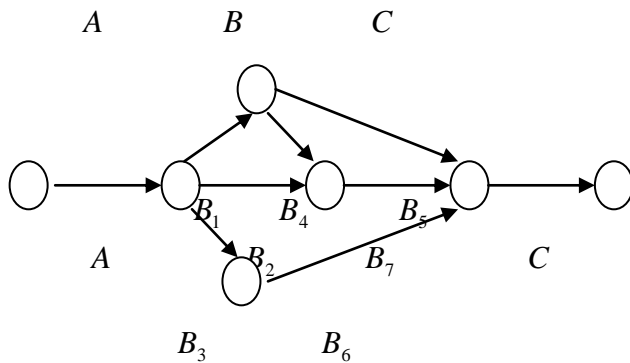
9. Ako dve aktivnosti C i B počinju istovremeno po završetku aktivnosti A, onda će to biti prikazano.



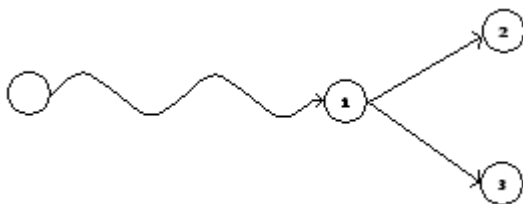
10. Ako aktivnost C zavisi od dve aktivnosti A i B, pri čemu aktivnost D zavisi od aktivnosti B, onda je potrebno uvesti fiktivnu aktivnost.



11. Ako je potrebno konstruisati mrežni dijagram dovoljno velikog projekta možemo da ga podelimo na delimične projekte i sastavimo grube mrežne dijagrame. Njih prikazujemo pomoću agregatnih aktivnosti, koje potom možemo detaljnije analizirati za potreba zahteva za preciznosti.



12. Pre početka stvarne realizacije projekta, često treba obaviti čitav niz pripremnih radova, pa se zbog toga uvodi pripreмна aktivnost, koja se grafički prikazuje, talasastom linijom, da bi je razlikovali od stvarnih aktivnosti.



#### 78. Međusobni odnosi aktivnosti.

- Međusobni odnosi aktivnosti daju nam informacije o vremenskoj zavisnosti i redosledu izvođenja svih aktivnosti projekta, što znači da znamo koje aktivnosti neposredno prethode, a koje neposredno slede posmatranu aktivnost.

1. Međusobni odnosi aktivnosti mogu se iskazati na više načina, a najčešće se iskazuju pomoću tabele koja ima samo dve kolone. U prvoj se nalaze posmatrane aktivnosti, a u drugoj aktivnosti koje im neposredno prethode.

2. Drugi način prikazivanja se sastoji u tome da se napravi matrica odnosa aktivnosti. Ova matrica je kvadratnog oblika i ima onoliko redova i kolona koliko ima aktivnosti u projektu. U redove se upisuju prethodne, a u kolone posmatrane aktivnosti. Međusobne zavisnosti aktivnosti se upisuju unapred određenim znakom (+), iznad glavne dijagonale ove matrice. Na osnovu obeleženih mesta u matrici odnosa aktivnosti po redovima može se odrediti koje aktivnosti mogu početi nakon završetka posmatrane aktivnosti i slično na osnovu oznaka po kolonama može se utvrditi koje aktivnosti će biti završene pre nego što počne posmatrana aktivnost.

#### 83. Kritične aktivnosti i kritičan put

Ako je max. dozvoljeno vreme trajanja aktivnosti (i,j) jednako njenom trajanju  $t_{ij}$ , takva aktivnost onda nema vremenskih rezervi i zove se kritična aktivnost.

Imaju osobinu da je  $t_i^1 = t_i^0$ , tj. vremenske rezerve i početnog i završnog događaja su jednake nuli. Put koji sadrži samo kritične aktivnosti i spaja početni sa završnim događajem, naziva se kritični put. On ima najduže trajanje i ujedno određuje vreme trajanja celog projekta. U mrežnom dijagramu može postojati više kritičnih puteva. Kritični put i kritične aktivnosti su od izuzetne važnosti za realizaciju projekta i one određuju trajanje i vreme realizacije.

#### 84. Vremenski parametri stohastičkog mrežnog modela

$a_{ij}$  – ocena najkraćeg mogućeg vremena trajanja aktivnosti – optimistička ocena

$b_{ij}$  – ocena najdužeg mogućeg vremena trajanja aktivnosti – pesimistička ocena

$m_{ij}$  – ocena najverovatnijeg vremena trajanja aktivnosti – najverovatnija ocena.

Očekivana vremena trajanja aktivnosti  $t_e(i, j)$  i varijansa  $\sigma_{t_e}^2(i, j)$  na osnovu ove tri ocene su:

$$t_e(i, j) = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6} \quad \sigma_{t_e}^2(i, j) = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36}$$

Pretpostavka: da su verovatnoće vremena trajanja raspodeljene po  $\beta$  raspodeli.

#### 85. Kritične aktivnosti i kritičan put u stohastičkom mrežnom modelu

Aktivnosti kod kojih se najraniji mogući i najkasniji dozvoljeni trenuci realizacije poklapaju i za početni i za završni događaj nazivaju se kritične aktivnosti, a put koji se samo od njih sastoji kritični put (povezuje početni i završni događaj). Vremenska rezerva jednaka je nuli za te aktivnosti  $R_i = 0$ , ako događaj i pripada kritičnom putu.

#### 86. Određivanje verovatnoća u stohastičkom mrežnom modelu

Verovatnoća ispunjenja nekog događaja mrežnog dijagrama u unapred predviđenom roku  $T_p(j)$ , označimo sa  $p \Rightarrow p = p\{T_E(j) < T_p(j)\}$ , može se smatrati prema graničnoj teoremi Ljapunova da su veličine  $T_e(j)$  raspoređene po normalnom zakonu verovatnoće. Ista pretpostavka može se uvesti i za stohastičke veličine  $T_L(i)$ .

#### 96. Markovljev model – osnovne pretpostavke i formulacije modela

Markovljevi modeli predstavljaju stohastičke modele čijim korišćenjem se vrši predviđanje verovatnoća ostvarenja budućih događaja na bazi poznavanja sadašnjih verovatnoća. Primena Markovljevih modela koristi se za predviđanje stanja nekog sistema u budućem periodu na bazi poznavanja njegovog sadašnjeg stanja i verovatnoća izmena tog stanja u periodu predviđanja. Osnovne pretpostavke modela:

- Postoji konačan broj mogućih stanja sistema
- Stanje sistema u nekom periodu zavisi od njegovog stanja u neposredno prethodnom modelu
- Veličina sistema i broj elemenata ostaju nepromenjeni u toku perioda za koji se vrši predviđanje
- Matrica prelaznih verovatnoća je stacionarna.

Osim prethodnih pretpostavki, primena Markovljevog modela podrazumeva da različita stanja u kojima se posmatrani sistem može naći istovremeno opisuju kompletan sistem i međusobno se isključuju. Ova osobina podrazumeva da navedena stanja jesu jedina moguća u kojima se posmatrani sistem može naći, kao i da se sistem u jednom trenutku ne može istovremeno naći u dva navedena stanja.

- Informacije o stanju sistema u određenom vremenskom periodu možemo predstaviti vektorom stanja oblika  $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t))$ , gde je  $S(t)$  vektor stanja sistema u  $t$ -tom periodu, dok su  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$  verovatnoće da će se sistem naći u jednom od  $n$  mogućih stanja u tom periodu.

- Prelazak sistema iz jednog u drugo stanje u dva uzastopna perioda možemo

predstaviti verovatnoćama prelaza. Tako imamo da verovatnoća  $p_{ij}$  predstavlja uslovnu verovatnoću prelaza sistema iz  $i$ -tog u  $j$ -to stanje u periodu  $(t, t+1)$ . Sve verovatnoće izmene stanja možemo predstaviti u vidu odgovarajuće matrice verovatnoće oblika:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrica  $P$  sadrži sve verovatnoće prelaza sistema iz jednog u drugo stanje. Elementi koji se nalaze na glavnoj dijagonali predstavljaju verovatnoće da sistem nakon istog vremenskog intervala neće menjati stanje iz prethodnog perioda, dok ostale verovatnoće pokazuju verovatnoće ostvarenja izmene stanja sistema u posmatranom vremenskom intervalu. Zbir elemenata po

vrstama jednak je jedinici:  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1$ .

Kada raspoložemo sa vektorom  $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))$  i matricom  $P$  stanje sistema za neki naredni period možemo predvideti na sledeći način:

$$S(t+1) = S(t) \cdot P$$

$$S(t+2) = S(t+1) \cdot P = S(t) \cdot P^2$$

$$S(t+3) = S(t+2) \cdot P = S(t) \cdot P^3$$

...

$$S(t+\tau) = S(t+\tau-1) \cdot P = S(t) \cdot P^\tau$$

## 97. Definisati i objasniti stabilno-ravnotežno stanje Markovljevog modela

*S obzirom na stacionarnost Markovljeve tranzitivne matrice, nakon određenog perioda doći će do tzv. uravnoteženja stanja posmatranog sistema, tj. sistem će se u dva različita perioda naći u istom stanju. Ostvarivanje ovog ravnotežnog stanja sistema možemo predstaviti na sledeći način:*

$$S(\tau) = S(\tau) \cdot P.$$

*Sa  $S(\tau) = (S_1(\tau), S_2(\tau), \dots, S_n(\tau))$  obeležili smo ravnotežno stanje sistema koje će biti ostvareno nakon isteka određenog broja perioda. U slučaju postojanja  $n$  mogućih stanja sistema, imamo:*

$$(S_1(\tau), S_2(\tau), \dots, S_n(\tau)) = (S_1(\tau), S_2(\tau), \dots, S_n(\tau)) \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Ako prihvatimo da je  $S_i(\tau) = S_i$  sistem jednačina čijim rešavanjem se može utvrditi ravnotežno stanje sistema će biti:*

$$S_1 = S_1 p_{11} + S_2 p_{21} + \dots + S_n p_{n1}$$

$$S_2 = S_1 p_{12} + S_2 p_{22} + \dots + S_n p_{n2}$$

⋮

$$S_n = S_1 p_{1n} + S_2 p_{2n} + \dots + S_n p_{nn}$$

Sistem jednačina nam omogućava da na osnovu poznate matrice prelaznih verovatnoća sistema utvrdimo njegovo ravnotežno stanje.

#### 98. Markovljev model za prognoziranje opredeljenja potrošača

U cilju prezentacije načina i mogućnosti primene Markovljevog modela za predviđanje tržišta određenog proizvoda, pretpostavimo da različite marke jednog proizvoda proizvodi  $n$  proizvođača na prvom tržištu, za koje unapred poznajemo ukupan broj kupaca ovih proizvoda. Neka je stanje tržišta, tj. relativno učešće posmatranih marki na tržištu u početnom periodu  $t=0$ , predstavljeno vektorom stanja  $S(0) = S_1(0), S_2(0), \dots, S_n(0) \rightarrow$  gde  $S_i(0)$  pokazuju verovatnoću da će kupci u  $t=0$  kupovati  $i$ -tu marku proizvoda, gde imamo  $\sum_{i=1}^n S_i(0) = 1$   $S_i(0) \geq 0$ . Ponašanje kupaca u nizu uzastopnih perioda

možemo predstaviti Markovljevom matricom  $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$ ,

u kojoj element  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ , pokazuje verovatnoću da će kupci koji su u periodu  $t=0$  kupovali  $i$ -tu marku, u periodu  $t+1$  preći na kupovinu  $j$ -te marke proizvoda.

Elementi na glavnoj dijagonali ( $i=j$ ), predstavljaju verovatnoće da će kupci nastaviti u narednom periodu da kupuju istu marku, zbog toga se ove verovatnoće nazivaju verovatnoće vernosti određenoj marki, pri čemu je  $\sum p_{ij} = 1$ . Uzastopna stanja strukture tržišta koja pokazuju opredeljenje kupaca u nizu sukcesivnih perioda možemo odrediti na sledeći način

$$S(1) = S(0) \cdot P$$

$$S(2) = S(1) \cdot P = S(0) \cdot P^2$$

$$S(3) = S(2) \cdot P = S(0) \cdot P^3$$

...

$$S(T) = S(T-1) \cdot P = S(0) \cdot P^T$$

Usled osobine stacionarnosti, nakon isteka određenog broja perioda dolazi do uravnotežavanja stanja strukture tržišta, tako da se ostvaruje tzv. finalno stanje.

#### 99. Markovljev model za određivanje konačnog stanja potraživanja u preduzeću

Sva potraživanja se razvrstavaku u sledeće 4 grupe:

stanje 1 ( $S_1$ ) – naplaćena potraživanja

stanje 2 ( $S_2$ ) – otpisana potraživanja

stanje 3 ( $S_3$ ) - potraživanja sa rokom dospeća do 30 dana

stanje 4 ( $S_4$ ) - potraživanja sa rokom plaćanja od 30 do 90 dana

$S_1$  i  $S_2$  predstavljaju konačna stanja, jer potraživanja koja se u njima nalaze ne mogu promeniti svoj karakter, a  $S_3$  i  $S_4$  se mogu promeniti. Promene posmatranih stanja potraživanja možemo predstaviti Markovljevom matricom prelaznih verovatnoća. Elementi ove matrice će predstavljati verovatnoće prelaza u preostala stanja u toku posmatranog vremenskog perioda. S obzirom da  $S_1$  i  $S_2$  predstavljaju konačna stanja iz kojih potraživanja ne mogu preći u neko od preostalih stanja, to će njihove verovatnoće da će ostati u datom stanju biti jednake jedinici, dok će verovatnoće prelaza iz ova dva u preostala dva stanja biti jednake nuli. Pored toga prvog dela Markovljeve tranzitivne matrice, drugi deo su verovatnoće prelaza  $S_3$  i  $S_4$  u konačna stanja, kao i verovatnoće zadržavanja potraživanja u ova dva stanja. Na osnovu toga Markovljevu matricu prelaznih verovatnoća možemo predstaviti u obliku:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Koristeći ovu matricu ukoliko poznajemo strukturu potraživanja možemo izvršiti predviđanje ovog stanja za naredni period. Ukoliko stanje potraživanja plaćanja u mesecu  $t$  predstavimo vektorom  $S_t = S_1, S_2, S_3, S_4$  pri čemu je  $\sum S_t = 1$ , stanje potraživanja u bilo kojem od narednih meseci možemo odrediti na osnovu relacije:

$$S(t+1) = S(t) \cdot P$$

$$S(t+2) = S(t+1) \cdot P = S(t) \cdot P^2$$

$$S(t+3) = S(t+2) \cdot P = S(t) \cdot P^3$$

...

$$S(t+\tau) = S(t+\tau-1) \cdot P = S(t) \cdot P^\tau$$

100. Definisati i objasniti fundamentalnu matricu  $F$  i matricu  $K$  u modelu za određivanje konačnog stanja potraživanja u preduzeću

Markovljevu matricu prelaznih verovatnoća podelićemo na:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline p_{31} & p_{32} & | & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & | & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica se određuje u sledećem obliku:  $F = (I - B)^{-1}$  odnosno

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} 1-p_{33} & -p_{34} \\ -p_{43} & 1-p_{44} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{(1-p_{33})(1-p_{44}) - p_{34}p_{43}} \cdot \begin{bmatrix} 1-p_{44} & p_{34} \\ p_{43} & 1-p_{33} \end{bmatrix}$$

Verovatnoće prelaska potraživanja  $J_3$  i  $J_4$  u jedno od prva dva konačna stanja, odnosno matricu  $K$ , možemo odrediti:

$$K = F \cdot A = \frac{1}{(1-p_{33})(1-p_{44}) - p_{34}p_{43}} \cdot \begin{bmatrix} 1-p_{44} & p_{34} \\ p_{43} & 1-p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} \\ K_{41} & K_{42} \end{bmatrix}$$

gde vrednosti elemenata prve vrste predstavljaju konačne verovatnoće da će potraživanja sa rokom dospeća do 30 dana biti naplaćena, odnosno otpisana, dok elementi druge vrste pokazuju konačne verovatnoće prelaska stanja potraživanja  $J_4$  u prva dva stanja. Pri tome imamo da je:

$$K_{31} + K_{32} = 1$$

$$K_{41} + K_{42} = 1$$

Korišćenjem matrice  $K$  moguće je utvrditi koji će iznos ukupnih potraživanja biti naplaćen, a koji otpisan. Ukoliko stanje potraživanja u određenom trenutku predstavimo vektorom  $Q_p = (q_3, q_4)$ , gde  $q_3$  pokazuje novčani iznos potraživanja stanja  $S_3$ , a  $q_4$  iznos potraživanja iz stanja  $S_4$ . Iznos potraživanja koja će biti konačno naplaćena, odnosno otpisana, dobićemo iz proizvoda  $Q_p \cdot K$ , odnosno:

$$Q_c = Q_p \cdot K = (q_3, q_4) \cdot \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} \\ K_{41} & K_{42} \end{bmatrix} = (q_{1c}, q_{2c}).$$

$q_{1c}$  – iznos konačno naplaćenih potraživanja

$q_{2c}$  – iznos konačno otpisanih potraživanja.

## Teoreme

### Teorema 1: (Odnos gornje i donje granice vrednosti matrične igre)

U matričnoj igri gornja granica vrednosti igre ( $\beta$ ) uvek je veća ili jednaka u odnosu na donju granicu vrednosti igre ( $\alpha$ ), tj.  $\beta \geq \alpha$ .

**Dokaz:** Iz definicije gornje i donje granice vrednosti igre, proizilazi njihov odnos prema bilo kom od elemenata matrice plaćanja, koji možemo predstaviti u obliku  $\beta_j = \max a_{ij} \geq a_{ij}$ , dok je  $\alpha_i = \min a_{ij} \leq a_{ij}$   $i=1, \dots, m$   $j=1, \dots, n$

Iz oba izraza proizilazi da je:

$$\beta_j = \max a_{ij} \geq a_{ij} \geq \min a_{ij} = \alpha_i, \text{ odakle je } \beta_j \geq \alpha_i.$$

Dakle, možemo zaključiti da donja granica vrednosti igre nije veća od gornje granice vrednosti igre, odnosno da je  $\beta \geq \alpha$ .

Ukoliko je u matričnoj igri  $\alpha = \beta$ , takva igra je prosta matrična igra i nazivamo je igrom sa sedlastom tačkom. Sedlasta tačka matrične igre nalazi se na preseku optimalne strategije igrača za koje su izjednačena maxmin i minmax vrednost, tj. donja i gornja granica vrednosti igre.

### Teorema 2: (Egzistencija mogućeg rešenja transportnog problema)

Transportni problem ima rešenje ukoliko je ukupna ponuda jednaka ukupnoj tražnji,

$$\text{tj. ako je } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

$$\text{Dokaz: } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \Rightarrow \text{kako su leve strane jednake, jednake su i desne strane, tj.}$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \text{ čime je dokaz uslov za rešavanje transportnog problema.}$$

Da bi dokazali da izjednačavanje ukupne ponude i ukupne tražnje predstavlja i dovoljan uslov za rešavanje transportnog problema, treba da pokažemo da količina

prevezene robe predstavljena izrazom  $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$ , gde je  $d = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ ,

predstavlja moguće rešenje transportnog problema.

Kako su sve vrednosti  $a_i, b_j, d$  nenegativne veličine, to je  $x_{ij} \geq 0$ . Ukoliko izraz

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d} \text{ sumiramo po } i \text{ i po } j \text{ dobijamo:}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{d} = b_j \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{d} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{d} = a_i \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{d} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

iz čega vidimo da  $x_{ij}$  zadovoljava sistem jednačina ograničenja i tražnje i ponude. Znači pokazali smo da jednakost ukupne ponude i ukupne tražnje u transportnom problemu, predstavlja potreban i dovoljan uslov za egzistenciju mogućeg rešenja.

**Teorema 3:** Matrica koeficijenta sistema ograničenja transportnog problema ima rang  $m + n - 1$

**Dokaz:** Matricu koeficijenta sistema ograničenja našeg transportnog problema možemo predstaviti u obliku:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrica  $A$  reda  $(m+n) \times mn$  ima za elemente jedinice i nule pri čemu u svakoj koloni ima samo dve jedinice a ostalo su nule. Ukoliko saberemo prvih  $m$  vrsta matrice  $A$  dobićemo vrstu čiji su svi elementi jedinice. Istu takvu vrstu ćemo dobiti sabiranjem preostalih  $n$  vrsta matrice  $A$  tj.:  $p_1 + p_2 + \dots + p_m = p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_{m+n}$ , gde smo sa  $p_1, p_2, \dots, p_{m+n}$  obeležili vrste matrice  $A$ . Znači da svaku vrstu matrice  $A$  možemo izraziti u vidu linearne kombinacije ostalih. Ukoliko sada iz matrice  $A$  isključimo poslednju vrstu i uzmemo minor  $(m+n-1)$ -og reda dobijamo:

$$\det M_{(m+n-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Rang matrice nije  $m+n$  jer je uvek 1 vrsta zavisna od drugih, pa pogodnom transformacijom dobijamo da je rang matrice  $m+n-1$ , jer je vrednost dobijenog

minora različita od nule. To je i trebalo dokazati.

**Teorema 4: (Postojanje zavisnosti između jednačina sistema ograničenja transportnog problema)**

Broj linearno nezavisnih jednačina sistema ograničenja transportnog problema je  $m + n - 1$ .

**Dokaz:** Pretpostavimo da imamo kombinaciju vrednosti promenljivih  $x_{ij}$  za koje znamo da zadovoljavaju sve jednačine sistema ograničenja izuzev na primer prvu jednačinu. Pokazaćemo da takva pretpostavka ne može biti zadovoljena. Očigledno je da levu stranu prve jednačine sistema ograničenja možemo pretstaviti u obliku:

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

ako je za svako  $x_{ij}$  zadovoljeno svih  $m+n$  jednačina sistema ograničenja tj.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \text{ i } \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \text{ to jednakost 1 možemo predstaviti u obliku}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=2}^m a_i = a_1$$

Na taj način je  $\sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1$  tj. zadovoljena je i prva jednačina sistema ograničenja.

Isto bi mogli jednostavno pokazati da je svaka od jednačina sistema ograničenja zadovoljena ukoliko su zadovoljene sve preostale  $m+n-1$  jednačine sistema ograničenja transportnog problema.

**Teorema 5: (Opšte osobine rešenja modela linearnog programiranja)**

Skup mogućih rešenja zadatka linearnog programiranja je konveksan skup.

**Dokaz:** Da bi dokazali tvrđenje naše teoreme, potrebno je da pokažemo da konveksna kombinacija svaka dva moguća rešenja predstavlja moguće rešenje. Zbog toga uzmimo da  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  i  $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  predstavljaju moguća rešenja problema na osnovu čega je

$$Ax' = b \text{ i } Ax'' = b$$

$$x = \lambda x' + (1 - \lambda)x'', \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\begin{aligned} Ax &= A[\lambda x' + (1 - \lambda)x''] = \lambda Ax' + (1 - \lambda)Ax'' = \lambda Ax' + Ax'' - \lambda Ax'' = \\ &= \lambda b + b - \lambda b = b \end{aligned}$$

na osnovu čega vidimo da sve konveksne kombinacije mogućih rešenja takođe predstavljaju moguća rešenja. Prema tome, skup mogućih rešenja je konveksan, što je trebalo i dokazati.

Bazično moguće rešenje  $x^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$  predstavlja optimalno rešenje zadatka standardnog problema  $\max$  ukoliko imamo da je  $z(x^*) \geq z(x')$  za bilo kojke moguće rešenje  $x'$ .

**Teorema 6: Optimalno rešenje zadatka linearnog programiranja nalazi se u ekstremnoj tački konveksnog skupa mogućih rešenja.**

**Dokaz:** Kako je skup mogućih rešenja konveksan i ograničen skup  $\Rightarrow$  postoji konačan broj ( $k$ ) ekstremnih tačaka, koje ćemo označiti sa  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Neka je

$x^*$  tačka za koju funkcija cilja ostvaruje max, odnosno za koju imamo da je  $z(x^*) \geq z(x)$  za svako moguće rešenje  $x$ . Ako je  $x^*$  ekstremna tačka konveksnog skupa teorema je dokazana.

Pretpostavimo da  $x^*$  nije ekstremna tačka skupa mogućih rešenja. Tada tačku  $x^*$  možemo izraziti kao konveksnu kombinaciju skupa ekstremnih tačaka,

$$tj. x^* = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k \quad \lambda_i \geq 0 \text{ i } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad i=(1, \dots, k)$$

$$z(x^*) = z(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \dots + \lambda_k z(x_k)$$

Ako u poslednjoj jednačini izaberemo tačku za koju funkcija  $z$  ostvaruje max vrednost, npr.  $x_k$ , tada možemo pisati

$$\lambda_1 z(x_k) + \lambda_2 z(x_k) + \dots + \lambda_k z(x_k) \geq \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \dots + \lambda_k z(x_k) = z(x^*)$$

Kako je  $\lambda_i \geq 0$  i  $\sum \lambda_i = 1 \Rightarrow$

$$\lambda_1 z(x_k) + \lambda_2 z(x_k) + \dots + \lambda_k z(x_k) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \cdot z(x_k) = z(x_k), \text{ tj.}$$

$z(x_k) \geq z(x^*)$ , što je trebalo i dokazati.

### **Teorema 7: (Odnos između funkcije cilja primarnog i dualnog problema)**

Za bilo koje moguće rešenje  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  primarnog problema i bilo koje moguće rešenje dualnog problema  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , vrednost funkcije cilja primarnog problema manja je ili jednaka vrednosti funkcije cilja dualnog problema,

$$tj. z(x) \leq v(y) \text{ ili } \sum_{j=1}^p c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

**Dokaz:** Posmatrajmo sistem ograničenja primara  $\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i$  i duala  $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$  i

pomnožimo sada desnu i levu stranu  $i$ -te nejednačine sistema ograničenja primara sa  $y_i$  i sumirajmo po indeksu  $i=1, \dots, m$ , na osnovu čega dobijamo:

$$\sum_{i=1}^m (a_{i1} x_1 + \dots + a_{ip} x_p) \cdot y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

Izraz na levoj strani prethodne nejednačine možemo predstaviti u obliku dvostruke sume po  $i=1, \dots, m$  i po  $j=1, \dots, p$  i dobićemo:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij} y_i x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Ako  $j$ -tu nejednačinu sistema ograničenja duala pomnožimo sa  $x_j$  i sumiramo po  $j=1, \dots, p$  dobijamo:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j \geq \sum_{j=1}^p c_j x_j.$$

Kako su leve strane poslednje dve nejednačine jednake konstatujemo da je:

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

### **Teorema 8: (Odnos između optimalnih vrednosti funkcije cilja primarnog i dualnog problema)**

*Ukoliko su  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$  i  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*)$  moguća rešenja primarnog i dualnog problema, za koje su vrednosti funkcija cilja primara i duala jednake  $z(x^*) = v(y^*)$ , tada su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja primara i duala respektivno.*

*Dokaz: Neka je  $x'$  neko moguće rešenje primara. Tada će biti  $z(x') \leq v(y^*)$ .*

*Međutim, kako je na osnovu uslova teoreme  $z(x^*) = v(y^*)$ , to je  $z(x') \leq z(x^*)$ . Kako je  $x'$  bilo koje moguće rešenje primara, to je  $z(x^*) = (\max) z(x)$ , odnosno  $x^*$  predstavlja optimalno rešenje primarnog problema.*

*Analogno se dokazuje da  $y^*$  predstavlja optimalno rešenje dualnog problema.*